

TRENTO, A.A. 2021/22  
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI  
FOGLIO DI ESERCIZI # 12

**Avvertenza:** alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

*Esercizio 12.1.* Si mostri che  $A_4$  non ha un sottogruppi di ordine 6.

*Esercizio 12.2.* Sia  $G$  un gruppo finito di ordine divisibile per il primo  $p$ , sia  $P$  un  $p$ -sottogruppo di Sylow di  $G$ , e sia  $n_p$  il numero di  $p$ -sottogruppi di Sylow di  $G$ .

- (1) Si mostri che se i  $p$ -sottogruppi di Sylow di  $G$  hanno a due a due intersezione  $\{1\}$ , allora

$$\left| \bigcup \{ P^g : g \in G \} \right| = n_p \cdot (|P| - 1) + 1.$$

- (2) Si mostri che se  $|P| = p$ , allora

$$\left| \bigcup \{ P^g : g \in G \} \right| = n_p \cdot (p - 1) + 1.$$

*Esercizio 12.3.* Si mostri che se  $p, q$  sono primi distinti, allora in un gruppo di ordine  $p^2q$  si ha  $n_p = 1$  o  $n_q = 1$  (o magari sono entrambi 1).

*Esercizio 12.4.* Si mostri che se  $G$  è un gruppo di ordine  $< 60$ , che non sia di ordine 1 o un numero primo, allora  $G$  non è semplice.

*Esercizio 12.5.* Sia  $G$  un gruppo semplice di ordine 60. Si mostri che  $G$  è isomorfo a  $A_5$ .