

TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 12

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 12.1. Si mostri che A_4 non ha un sottogruppi di ordine 6.

Esercizio 12.2. Sia G un gruppo finito di ordine divisibile per il primo p , sia P un p -sottogruppo di Sylow di G , e sia n_p il numero di p -sottogruppi di Sylow di G .

- (1) Si mostri che se i p -sottogruppi di Sylow di G hanno a due a due intersezione $\{1\}$, allora

$$\left| \bigcup \{ P^g : g \in G \} \right| = n_p \cdot (|P| - 1) + 1.$$

- (2) Si mostri che se $|P| = p$, allora

$$\left| \bigcup \{ P^g : g \in G \} \right| = n_p \cdot (p - 1) + 1.$$

Esercizio 12.3. Si mostri che se p, q sono primi distinti, allora in un gruppo di ordine p^2q si ha $n_p = 1$ o $n_q = 1$ (o magari sono entrambi 1).

Esercizio 12.4. Si mostri che se G è un gruppo di ordine < 60 , che non sia di ordine 1 o un numero primo, allora G non è semplice.

Esercizio 12.5. Sia G un gruppo semplice di ordine 60. Si mostri che G è isomorfo a A_5 .