

TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 11

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 11.1.

- (1) Si trovino le classi di coniugio di A_5 .
- (2) Si definisca il concetto di gruppo semplice.
- (3) Si mostri che un gruppo abeliano finito è semplice se e solo se ha ordine primo.
- (4) (Facoltativo) Si mostri che un gruppo abeliano (dunque a priori potrebbe essere anche infinito, non sto assumendo che sia finito) è semplice se e solo se è finito, di ordine un numero primo.
(SUGGERIMENTO: Sia G abeliano, semplice. Se ha un elemento di periodo finito, allora ha anche un elemento di ordine primo, e si conclude come nel caso finito. Se invece tutti gli elementi hanno ordine finito, allora G contiene un sottogruppo isomorfo a \mathbf{Z} , e allora. . .)
- (5) Si mostri che A_5 è un gruppo semplice.

Esercizio 11.2.

- (1) Si enunci e si dimostri il Primo Teorema di Sylow.
- (2) Si mostri in particolare che se p è un numero primo, $e \geq 1$, e k è un intero tale che $p \nmid k$, allora

$$\binom{p^e k}{p^e} \equiv k \pmod{p}.$$

Esercizio 11.3. Si enunci e si dimostri l'equazione delle classi.

Esercizio 11.4.

- (1) Si mostri che se $G \neq \{1\}$ è un p gruppo finito, per un primo p , allora $Z(G) \neq \{1\}$.
- (2) Sia G un p -gruppo finito. Si mostri che per ogni divisore d dell'ordine di G , esiste un sottogruppo *normale* di G di ordine d .
- (3) Sia G un gruppo tale che $G/Z(G)$ è ciclico. Si mostri che G è abeliano.
- (4) Sia p un primo. Si mostri che ogni gruppo di ordime p^2 è abeliano.

Esercizio 11.5 (Facoltativo).

Si enunci e si dimostri il teorema di Lucas.

Esercizio 11.6 (Facoltativo).

Si enunci e si dimostri il teorema di Kummer.

Esercizio 11.7. Sia G un gruppo finito di ordine divisibile per il primo p . Si mostri che sono equivalenti:

- (1) G ha un unico p -sottogruppo di Sylow.

(2) esiste un p -sottogruppo di Sylow che è normale in G .

Esercizio 11.8. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di Sylow.

Esercizio 11.9. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Sylow.

Esercizio 11.10. Siano $p > q$ primi.

(1) Si mostri che se $q \nmid p - 1$, ogni gruppo di ordine pq è ciclico.

(2) Si mostri che se $q \mid p - 1$, allora esiste un gruppo non abeliano di ordine pq .