

TRENTO, A.A. 2021/22  
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI  
FOGLIO DI ESERCIZI # 10

**Avvertenza:** alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

*Esercizio 10.1.* Siano  $\Omega, \Delta$  insiemi, e il gruppo  $G$  agisca su  $\Omega$ . Si definisca l'azione naturale di  $G$  su  $\Delta^\Omega$ .

*Esercizio 10.2.* Si enunci e si dimostri il Lemma di Cauchy.

*Esercizio 10.3.* Si trovino orbite e stabilizzatori dell'azione di un gruppo  $G$  per coniugio su se stesso, e sull'insieme dei suoi sottogruppi.

*Esercizio 10.4.* Il gruppo finito  $G$  agisca sull'insieme  $\Omega$ , e sia  $H$  un sottogruppo di  $G$  di indice 2. Sia  $\alpha \in \Omega$ .

Si mostri che

$$|\alpha^H| = \begin{cases} |\alpha^G| & \text{se } G_\alpha \not\leq H, \\ \frac{1}{2} \cdot |\alpha^G| & \text{se } G_\alpha \leq H. \end{cases}$$

*Esercizio 10.5 (Facoltativo).* Si dimostri la variante dell'esercizio precedente in cui  $H \trianglelefteq G$  ha indice un numero primo  $p$ .

*Esercizio 10.6.* Si trovino le classi di coniugio di  $S_4$  e  $A_4$ .