TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 9

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 9.1. Si spieghi il significato della presentazione

$$\left\langle\, a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, abab = 1 \,\right\rangle,$$

e si mostri che essa definisce S_3.

Esercizio 9.2. Si mostri che la presentazione

$$G = \left\langle\, a, b : a^n, b^2, (ab)^2 \,\right\rangle$$

definisce il gruppo diedrale D_n di ordine $2n$. (Nel senso che $G \cong D_n$. (Suggerimento: Notate che $1 = (ab)^2 = abab$ equivale a $a^b = a^{-1}$.)

Esercizio 9.3. Si mostri che la presentazione

$$G = \left\langle\, a, b : a^2 = 1, b^3 = 1, a^{b^2} = aa^b \,\right\rangle$$

definisce il gruppo alterno A_4. (Qui $a^{b^2} = aa^b$ sta per la relazione $a^{b^2} \cdot (aa^b)^{-1}$.)

Notate che la presentazione di cui sopra è equivalente a

$$G = \left\langle\, a, b : a^2 = 1, b^3 = 1, (ab)^3 = 1 \,\right\rangle.$$

Infatti $a^{b^2} = aa^b$ significa

$$b^{-2}ab^2 = ab^{-1}ab, \quad \text{cioè} \quad bab = ab^{-1}a,$$

da cui

$$1 = bababa = (ba)^3,$$

e i passaggi sono reversibili. (Notate che $(ab)^3 = b^{-1}(ba)^3b$, dunque $(ab)^3 = 1$ se e solo se $(ba)^3 = 1$.)
(Suggerimento: Da $a^{b^2} = aa^b$ segue,coniugando con b, che $a = a^{b^3} = a^b a^{b^2} = a^b aa^b$, ovvero $a^b a = aa^b$, dato che $1 = a^2 = (a^b)^2$. Ora mostrate che il sottoinsieme $L = \left\{\, b^i a^j (a^b)^k : 0 \le i < 3, 0 \le j, k < 2 \,\right\}$ di G è un sottogruppo, e quindi coincide con G, che ha quindi al più ordine 12. Da altra parte se F è il gruppo libero su x, y, nel nucleo del morfismo $\varphi : F \to A_4$ definito da $\varphi(x) = (12)(34)$, $\varphi(y) = (123)$ ci sono proprio $x^2, y^3, (xy)^3$.)

Esercizio 9.4. Sia $\Omega \ne \emptyset$ un insieme, G un gruppo.

Si mostri che i seguenti due concetti sono equivalenti:

(1) una azione destra di G su Ω, dunque una funzione

$$\Omega \times G \to \Omega$$
$$(\alpha, g) \mapsto \alpha^g$$

che soddisfi

$$\begin{cases} \alpha^1 = \alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \\ (\alpha^g)^h = \alpha^{gh} & \text{for } \alpha \in \Omega \text{ e } g, h \in G. \end{cases}$$

(2) un morfismo

$$\psi : G \to S(\Omega),$$

ove $S(\Omega)$ è il gruppo delle permutazioni (cioè delle funzioni biiettive) su Ω, con la composizione da-sinistra-a-destra.

Dunque occorre vedere come si passa da (1) a (2) e viceversa, e che applicando le procedure due volte si torna al punto di partenza.

Esercizio 9.5. Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme, G un gruppo.

Definiamo una azione *sinistra* di G su Ω come una funzione

$$\Omega \times G \to \Omega$$
$$(\alpha, g) \mapsto {}^g\alpha$$

che soddisfi

$$\begin{cases} \alpha^1 = \alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \\ {}^g({}^h\alpha) = {}^{gh}\alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \text{ e } g, h \in G. \end{cases}$$

(1) Mostrate, sulla falsariga dell'Esercizio 9.4, che una azione sinistra equivale a un antiomomorfismo

$$\psi : G \to S(\Omega),$$

ove $S(\Omega)$ è sempre il gruppo delle permutazioni (cioè delle funzioni biiettive) su Ω, con la composizione da-sinistra-a-destra. Dunque $\psi(gh) = \psi(h)\psi(g)$ per $g, h \in G$.

(2) Siano A, B gruppi. Si mostri che gli antiomomorfismi da A a B sono tutti e soli della forma

$$x \mapsto \psi(x)^{-1},$$

ove ψ è un morfismo usuale da A a B.

Esercizio 9.6. Il gruppo G agisca sull'insieme Ω. Per $\alpha \in \Omega$, sia

$$\alpha^G = \{\, \alpha^g : g \in G \,\}$$

l'orbita di α sotto G.

(1) Si mostri che le orbite sono una partizione di Ω.
(2) Si mostri che G agisce in modo naturale su ogni orbita.
(3) Si mostri che se $\Delta \subseteq \Omega$ è tale che G agisce su Δ, allora Δ è unione di orbite.
(4) Si mostri che sono equivalenti
   (a) esiste $\alpha \in \Omega$ tale che $\alpha^G = \Omega$,
   (b) per ogni $\alpha \in \Omega$ si ha che $\alpha^G = \Omega$.

Esercizio 9.7. Il gruppo G agisca sull'insieme Ω. Per $\alpha \in \Omega$, sia

$$G_\alpha = \{ g \in G : \alpha^g = \alpha \}$$

lo stabilizzatore di α in G.

(1) Si mostri che G_α è un sottogruppo di G.
(2) Si mostri che

$$G_{\alpha^g} = g^{-1} G_\alpha g.$$

(3) Si mostri che il nucleo dell'azione è

$$\cap \{ G_\alpha : \alpha \in \Omega \}.$$

Esercizio 9.8.

(1) Si enunci e si dimostri il Teorema Orbita-Stabilizzatore.
(2) Si mostri che se G agisce su Ω, e $\alpha \in \Omega$, $g \in G$, allora si ha

$$\left\{ x \in G : \alpha^x = \alpha^h \right\} = G_\alpha g.$$

Esercizio 9.9. Il gruppo G agisca sull'insieme Ω.

(1) Si mostri che G agisce in modo naturale sull'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ delle parti (sottoinsiemi) di Ω.
(2) Fissata una cardinalità $\aleph$, si mostri che G agisce sull'insieme dei sottoinsiemi di Ω di cardinalità $\aleph$.

Esercizio 9.10. Sia $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, e

$$D_4 = \{ 1, (1234), (13)(24), (1432), (13), (24), (12)(34), (14)(23) \}$$

il gruppo diedrale.

(1) Si consideri l'azione di D_4 sui sottoinsiemi di Ω con due elementi.
(2) Dato $\{ 1, 3 \} \in \mathcal{P}(\Omega)$, si calcoli l'orbita $\Sigma = \{ 1, 3 \}^{D_4}$, mostrando che è $\{ \{ 1, 3 \}, \{ 2, 4 \} \}$.
(3) Si calcolino gli stabilizzatori e il nucleo dell'azione di D_4 su Σ.
(4) Si mostri che l'orbita di $\{ 1, 2 \}$ è data dall'insieme

$$\{ \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 3, 4 \}, \{ 4, 1 \} \}$$

dei lati.

Esercizio 9.11.

(1) Si definiscano la rappresentazione regolare destra e sinistra di un gruppo, e se ne calcolino orbite, stabilizzatori e nucleo.
(2) Si enunci e si dimostri il Teorema di Cayley.

Esercizio 9.12. Sia G un gruppo, e H un suo sottogruppo.

Sia $\rho : G \to S(G)$ la rappresentazione regolare destra di G, e si consideri l'azione di H su G data dalla restrizione

$$\rho_{\restriction H} : H \to S(G).$$

(1) Si mostri che le orbite di questa azione di H su G sono le classi laterali *sinistre* di H in G.

(2) Si usi l'osservazione che segue orbita/stabilizzatore per mostrare che per ogni $g \in G$ la funzione

$$\begin{aligned} H &\to gH \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

è una biiezione fra H e Hg.

(3) Se ne deduca il Teorema di Lagrange.