TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 8

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 8.1 (Facoltativo).

Questo esercizio, scritto su sollecitazione di alcuni studenti, mostra come costruire dato un primo p dispari, un gruppo non abeliano G in cui valga $g^p = 1$ per ogni $g \in G$.

Sia F il campo con p elementi, ove p è un primo dispri.

Primo metodo. Si consideri l'insieme di matrixi

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in F \right\}.$$

Si mostri che G è un gruppo di ordine p^3, e che si ha $g^p = 1$ per ogni $g \in G$. Per mostrare quest'ultimo fatto, può essere utile notare che per una matrice

$$n = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha $n^3 = 0$, e che dato che l'anello delle matrici a coefficienti in F ha caratteristica p, in esso vale

$$(1 + n)^p = 1 + pn + \binom{p}{2} n^2 = 1,$$

dato che $n^3 = 0$, e $p \mid \binom{p}{2}$ dato che $p > 2$.

Secondo metodo, probabilmente più complicato da verificare. Sia K un gruppo abeliano elementare di ordine p^2. Sia $H = \langle h \rangle$ un gruppo ciclico di ordine p. Consideriamo l'automorfismo di K dato dalla matrice a coefficienti in F

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si mostri che m ha ordine p. Dunque esiste un morfismo $\psi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ individuato da $\psi(h) = m$. Allora $G = H \ltimes_\psi K$ ha la proprietà richiesta.