TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 7

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 7.1.

(1) Siano H, K gruppi, sia $H \times K$ il loro prodotto semidiretto, e $H \ltimes_\psi K$ un prodotto semidiretto, per un certo morfismo $\psi : H \to \mathrm{Aut}(K)$.
   (a) Si mostri che la funzione
   $$\begin{aligned} H \times K &\to H \ltimes_\psi K \\ (h, k) &\mapsto (h, k) \end{aligned}$$
   è un isomorfismo se e solo se $\psi(H) = \{ 1 \}$.
   (b) Sia $K = S_3$, $H = \langle b \rangle$ ciclico di ordine 2.
   Sia $\psi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ il morfismo definito da
   $$\psi(b) = (x \mapsto x^{(12)}).$$
   Dunque $\psi(b)$ è l'automorfismo interno dato dal coniugio $x \mapsto x^{(12)}$.
   Si mostri che esiste un isomorfismo $f : H \times K \to H \ltimes_\psi K$.

(2) Siano $C_n = \langle a \rangle$ e $C_m = \langle b \rangle$ gruppi ciclici di ordine rispettivamente n e m.
   (a) Si mostri che se $\gcd(m, \varphi(n)) = 1$, allora l'unico prodotto semidiretto $C_n \rtimes C_m$ è quello diretto.
   (b) Si mostri che se $\gcd(m, \varphi(n)) > 1$, allora esiste un morfismo non banale $\psi : C_m \to \mathrm{Aut}(C_n)$, in modo che il prodotto semidiretto $C_n \rtimes_\psi C_m$ non sia quello diretto.

Esercizio 7.2.

(1) Si costruisca il gruppo diedrale
$$D_n = \{ f_{\varepsilon,b} : \varepsilon = \pm 1, b \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \},$$
per $n > 2$, ove $x f_{a,b} = xa + b$.

(2) Si mostri che ogni $f_{-1,b}$ 'e una involuzione.

(3) Si mostri che in D_n ci sono due involuzioni (cioè elementi di ordine 2) il cui prodotto ha ordine n.

(4) Si mostri che
   (a) per n dispari ogni $f_{-1,b}$ ha esattamente un punto fisso,
   (b) per n pari
      (i) $f_{-1,b}$ non ha punti fissi se b è (la classe di) un numero dispari,
      (ii) $f_{-1,b}$ ha due punti fissi se b è (la classe di) un numero pari.

(5) Si mostri che per $n > 2$ il gruppo diedrale D_n è un prodotto semidiretto di un gruppo ciclico K di ordine n per un gruppo $H = \langle b \rangle$ di ordine 2 mediante il morfismo $\psi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ tale che $\psi(b) = (x \mapsto x^{-1})$.

Esercizio 7.3. Sia $n \geq 2$.

(1) Si mostri che l'insieme A_n delle permutazioni pari è un sottogruppo di S_n.
(2) Si mostri che A_n ha indice 2 in S_n.
(SUGGERIMENTO: Questo non l'ho fatto a lezione, ma si mostri che

$$S_n = A_n \dot{\cup} (12)A_n,$$

ove $(12)A_n$ consiste delle permutazioni dispari (cioè non pari). In altre parole, la funzione

$$\sigma \mapsto (12)\sigma$$

è una biiezione fra l'insieme delle permutazioni pari e l'insieme di quelle dispari.)
(3) Si mostri che

$$A_4 = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \text{gli otto 3-cicli} \}.$$

(4) Si mostri che $V = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ è un sottogruppo normale di A_4, che è un 2-gruppo abeliano elementare.
(5) Si mostri che A_4 è prodotto semidiretto interno di V mediante $C = \langle (123) \rangle$.
(6) Si mostri che la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

definisce un automorfismo di ordine 3 di un gruppo elementare abeliano di ordine p^2, per p primo.
(7) Ponendo $p = 2$ nel punto precedente, si costruisca un prodotto semidiretto, ma non diretto, esterno di un gruppo abeliano elementare di ordine 4 per un gruppo di ordine 3.