TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 6

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 6.1. Sia L un gruppo e $H = \langle\, a \,\rangle$ un gruppo ciclico di ordine m.

(1) Si mostri che se $\psi : H \to L$ è un morfismo, allora $\psi(a)$ è un elemento di L di ordine un divisore di m.
(2) Si mostri che se $c \in L$ è un elemento di ordine un divisore di m, allora esiste un unico morfismo $\psi : H \to L$ tale che $\psi(a) = c$.

Esercizio 6.2. Sia V un gruppo abeliano, e F un campo.

(1) Si mostri che è equivalente dare
  (a) una struttura di F-spazio vettoriale su V, e
  (b) un morfismo di anelli con unità $F \to \mathrm{End}(V)$.
(2) Sia G un p-gruppo abeliano elementare, per un primo p. Si mostri che G ammette una stuttura di spazio vettoriale sul campo $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
(3) Se ne deduca che il gruppo degli automorfismi del gruppo V è isomorfo al gruppo $\mathrm{GL}(n, p)$ delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti nel campo con p elementi.

Esercizio 6.3.

(1) Si definisca il concetto di sottogruppo caratteristico.
(2) Si mostri che un sottogruppo caratteristico è sempre normale.
(3) Sia p è un primo, e $G = C(p) \times C(p)$ un gruppo abeliano elementare di ordine p^2.
  (a) Si mostri che ogni sottogruppo di G è normale.
  (b) Si mostri che nessun sottogruppo di G di ordine p è caratteristico.

Esercizio 6.4. Sia G prodotto diretto interno dei gruppi H e K.

(1) Si mostri che la funzione
$$\begin{aligned}\Phi :\ &\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \to \mathrm{Aut}(G)\\ &(\alpha, \beta) \mapsto (hk \mapsto h^\alpha k^\beta)\end{aligned}$$
è un morfismo iniettivo.
(2) Si mostri che se H, K sono caratteristici in G, allora Φ è anche suriettiva, e dunque un isomorfismo.
(3) Si enuncino senza dimostrazione i risultati precedenti per un numero arbitrario di fattori diretti
(4) Sia $n = p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$, con p_i primi distinti, e $e_i > 0$. Sia G un gruppo ciclico di ordine n. Si mostri che G è prodotto diretto di gruppi ciclici P_i di ordine $p_1^{e_1}, \dots, p_l^{e_l}$.
(5) Si mostri che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è caratteristico.
(6) Si mostri che
$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(P_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(P_l).$$