TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 5

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 5.1. Sia $G = \mathbf{R} \setminus 0$. definiamo su G un'operazione "$\star$" mediante

$$x \star y = \begin{cases} x \cdot y, & \text{se } y > 0, \\ y/x, & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

(1) Si mostri che $(G, *)$ è un gruppo, che non è abeliano.
(2) Magari dopo la lezione successiva, si cerchi di spiegare perché questo esercizio è collocato proprio in questo punto del corso.

Esercizio 5.2. Sia G un gruppo,

(1) $H \le G$, $K \trianglelefteq G$,
(2) $G = \langle H, K \rangle = HK$, e
(3) $H \cap K = \{ 1 \}$.

(a) Si mostri che se $h_i \in H$, $k_i \in K$, abbiamo

$$(h_1 k_1)(h_2 k_2) = (h_1 h_2)(k_1^{h_2} k_2),$$

con $h_1 h_2 \in H$, e $k_1^{h_2} k_2 \in K$ dato che K è un sottogruppo normale. (Qui $k_1^{h_2} = h_2^{-1} k_1 h_2$.)

(b) Si mostri che per $h \in H$ fissato, la funzione

$$\begin{aligned} \varphi(h) : K &\to K \\ k &\to k^h = h^{-1} k h \end{aligned}$$

è un automorfismo di K.

(c) Mostrate che la funzione

$$\begin{aligned} \varphi : H &\to \mathrm{Aut}(K) \\ h &\mapsto (k \to k^h) \end{aligned}$$

è un morfismo di gruppi.

Viceversa, siano H, K gruppi, e $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(K)$ un morfismo. Consideriamo l'*insieme* $H \times K$, con l'operazione data da

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{\varphi(h_2)} k_2),$$

ove $k^{\varphi(h)}$ indica l'azione su $k \in K$ dell'automorfismo $\varphi(h)$.

(i) Mostrate che con questa operazione l'insieme $H \times K$ diventa un gruppo, che si indica con $K \rtimes_\varphi H$ o $H \ltimes_\varphi K$ (omettendo la φ se è implicita), e si chiama *prodotto semidiretto esterno di K mediante H attraverso φ*.
(ii) Indicate in particolare l'elemento neutro, e l'inverso di ogni elemento.
(iii) Mostrate che $H' = \{ (h, 1) : h \in H \}$ e $K' = \{ (1, k) : k \in K \}$ sono sottogruppi di $H \ltimes_\varphi K$ isomorfi rispettivamente a K e H.

(iv) Mostrate che $H \ltimes_\varphi K = H'K'$, con $H' \cap K' = \{ 1 \}$.
(v) Mostrate che $K' \trianglelefteq H \ltimes_\varphi K$.
(vi) Mostrate che si ha
$$(1, k)^{(h,1)} = (1, k^{\varphi(h)}),$$
e dunque $H \ltimes_\varphi K$ è prodotto semidiretto interno di K' mediante H', attraverso il morfismo φ, o più precisamente il morfismo
$$\begin{aligned} \varphi' : H' &\to \mathrm{Aut}(K') \\ (h, 1) &\mapsto ((1, k) \mapsto (1, k^{\varphi(h)})). \end{aligned}$$

Esercizio 5.3.

(1) Siano A, B, C gruppi, $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ morfismi.
   (a) Si mostri che la composizione (da destra a sinistra) $\varphi \circ \psi : AtoC$ è un morfismo.
   (b) Si mostri che se φ, ψ sono isomorfismi, allora anche $\varphi \circ \psi$ lo è.
   (c) Si mostri che se φ è un isomorfismo (dunque in particolare una funzione biiettiva, che dunque ha una inversa φ^{-1}), allora anche $\varphi^{-1} : B \to A$ lo è.
(2) Sia G un gruppo, $\mathrm{End}(G)$ l'insieme degli *endomorfismi* di G, cioè dei morfismi $G \to G$.
   (a) Si mostri che $\mathrm{End}(G)$ è un monoide rispetto alla composizione.
   (b) Si mostri che il gruppo degli elementi invertibili del monoide $\mathrm{End}(G)$ è il gruppo degli *automorfismi* di G, ovvero degli isomorfismi $G \to G$.

Esercizio 5.4.

(1) Sia G un gruppo. Si mostri che sono equivalenti
   (a) G è abeliano,
   (b) la funzione $x \mapsto x^2$ è un endomorfismo di G, e
   (c) la funzione $x \mapsto x^{-1}$ è un endomorfismo di G.
(2) Sia G un gruppo. Si mostri che la somma di due endomorfismi di G è ancora un endomorfismo di G se e solo se G è abeliano.
(3) Si costruisca l'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano.

Esercizio 5.5.

(1) Si mostri che il monoide degli endomorfismi di un gruppo ciclico di ordine n è isomorfo al monoide $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ rispetto al prodotto.
(2) Si mostri che il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico di ordine n è isomorfo al gruppo $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ delle unità dell'anello $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, e dunque ha ordine $\varphi(n)$, ove φ è la funzione di Eulero.