TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 4

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 4.1. Si enunci il Lemma di Cauchy, e lo si dimostri per un gruppo abeliano.

Esercizio 4.2. Sia p un numero primo. Utilizzando il Lemma di Cauchy, si mostri che per un gruppo finito P sono equivalenti:

(1) ogni elemento ha ordine una potenza di p, e
(2) P ha ordine una potenza di p.

Un gruppo che soddisfi la prima condizione si dice *p-gruppo*.

Esercizio 4.3 (Facoltativo). Si diano esempi di p-gruppi infiniti.

Esercizio 4.4. Sia G un gruppo abeliano,
$$|\,G\,| = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t},$$
con p_i primi distinti, e $e_i > 0$ per ogni i.

Per ogni i, si ponga
$$P_i = \left\{ x \in G : x^{p_i^{e_i}} = 1 \right\}.$$

(1) Si mostri che ogni P_i è un sottogruppo di G, di ordine una potenza di p_i.
(2) Si mostri che
$$G = P_1 P_2 \cdots P_t.$$
(3) Si mostri che per ogni i si ha
$$P_i \cap P_1 \cdots \widehat{P_i} \cdots P_t = \{\,1\,\}.$$
(4) Se ne deduca che P è prodotto diretto interno dei P_i.
(5) Se ne deduca che $|\,P_i\,| = p_i^{e_i}$ per ogni i.

Esercizio 4.5. Sia G un p-gruppo abeliano finito

(1) Si mostri che in G esiste un elemento di ordine massimo.
(2) Si mostri che se a è un tale elemento, allora esiste $B \leq G$ tale che $G = \langle\, a\,\rangle \times B$.
(3) Si mostri che G è prodotto diretto di gruppi ciclici.

Esercizio 4.6. Siano G_1, G_2, G_3 gruppi.

(1) Si mostri che $G_1 \times \{\,1\,\} \cong G_1$.
(2) Si mostri che $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.
(3) Si mostri che
$$(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times G_2 \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3).$$

Esercizio 4.7. Si mostri che un gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici.

Esercizio 4.8. Sia G un gruppo.

(1) Si mostri che gli endomorfismi di G (cioè i morfismi $G \to G$) formano un monoide $(\mathrm{End}(G), \circ, \mathbf{1})$ rispetto alla composizione, ove $\mathbf{1}$ è la funzione identica.
(2) Si mostri che se $\varphi \in \mathrm{End}(G)$ ha una funzione inversa φ^{-1}, allora φ^{-1} è anch'essa un endomorfismo.

Gli elementi invertibili di $\mathrm{End}(G)$ si dicono automorfismi di G, e formano il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$.