TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 3

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 3.1.
Sia G un gruppo.

(1) Sia $S \subseteq G$. Si definisca
$$\langle S \rangle = \cap \{ H \le G : H \supseteq S \} .$$
Si mostri che valgono
(a) $S \subseteq \langle S \rangle \le G$,
(b) se $S \subseteq H \le G$, allora $\langle S \rangle \le H$.
Dunque $\langle S \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G che contenga S.

(2) Siano G, H gruppi, $f : G \to H$ un morfismo, $S \subseteq G$. Si mostri che
$$\langle f(S) \rangle = f(\langle S \rangle). \tag{3.1.1}$$

(3) Sia G un gruppo, $S \subseteq G$. Si mostri che
$$\langle S \rangle = \{ s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbf{N}, s_i \in S, \varepsilon_i \in \{ 1, -1 \} \} .$$

(4) Si usi quest'ultimo risultato per ridimostrare la formula (3.1.1).

(5) Sia G un gruppo abeliano, $S = \{ s_1, \dots, s_n \} \subseteq G$. Si mostri che
$$\langle S \rangle = \{ s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} : s_i \in S, e_i \in \mathbf{Z} \} .$$

(6) Sia $S = \{ s \} \subseteq G$. Si mostri che
$$\langle S \rangle = \langle s \rangle = \{ s^e : e \in \mathbf{Z} \} .$$

Esercizio 3.2.

(1) Si descrivano, usando il terzo teorema di isomorfismo, i sottogruppi di $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, per $n > 0$, dicendone anche l'ordine.

(2) Sia a un elemento di ordine n in un gruppo, e sia $k \in \mathbf{Z}$. Si mostri che l'ordine di a^k è
$$\frac{n}{\gcd(n, k)}.$$

(3) Si descrivano i sottogruppi di un gruppo ciclico finito $\langle a \rangle$ di ordine n
(a) prima definendo ed usando un isomorfismo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \langle a \rangle$,
(b) poi direttamente.
(Suggerimento: Per quel che riguarda l'ultimo punto, notiamo intanto che se $m \mid n$, allora $\left| a^{n/m} \right| = m$ per l'esercizio precedente. Dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle$ è un sottogruppo di ordine m. Sia ora H un sottogruppo di $\langle a \rangle$ di ordine m, e dunque indice n/m. Dato che $\langle a \rangle$ è ciclico, è anche abeliano, dunque ogni sottogruppo è normale. Il gruppo quoziente $\langle a \rangle / H$ ha ordine n/m, dunque ogni suo elemento elevato alla potenza n/m è eguale all'elemento neutro $1H = H$. In particolare $(aH)^{n/m} = a^{n/m}H = H$, ovvero $a^{n/m} \in H$.

Dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle \le H$. Siccome entrambi i sottogruppi hanno ordine m, sono eguali, $\left\langle a^{n/m} \right\rangle = H$, e dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle$ è l'unico sottogruppo di ordine m di $\langle a \rangle$.)

Esercizio 3.3. Siano G_1, G_2 gruppi.

(1) Mostrate che il prodotto cartesiano
$$G_1 \times G_2 = \{ (g_1, g_2) : g_i \in G_i \}$$
diventa un gruppo, che chiamiamo *prodotto esterno* dei due gruppi, con le operazioni per componenti
$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2).$$

(2) Consideriamo i sottoinsiemi
$$G_1' = \{ (g_1, 1) : g_1 \in G_1 \}, \qquad G_2' = \{ (1, g_2) : g_2 \in G_2 \}$$
di $P = G_1 \times G_2$.
   (a) Mostrate che $G_i \cong G_i'$, ove "$\cong$" è il simbolo per l'isomorfismo.
   (b) Mostrate che $G_i' \trianglelefteq P$,
   (c) Mostrate che $G_1' \cap G_2' = \{ 1 \}$,
   (d) Mostrate che $G_1' G_2' = P$.
   (e) Mostrare che ogni elemento di P si scrive in modo unico come $x_1 x_2$, per $x_i \in G_i'$.

Esercizio 3.4. Dato un gruppo G, e $x, y \in G$, se ne definisce il *commutatore* come
$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y = (yx)^{-1} x y = x^{-1} x^y = (y^{-1})^x y,$$

(1) Si mostri che $xy = yx$ se e solo se $[x, y] = 1$.
(2) Si mostri che $[x, y]^{-1} = [y, x]$.
(3) Sia $N \le G$. Si mostri che $N \trianglelefteq G$ se e solo se per ogni $n \in N$ e $g \in G$ si ha $[n, g] \in N$,

Esercizio 3.5. Sia G un gruppo che contiene due sottogruppi G_1, G_2 tali che

(1) $G_i \trianglelefteq P$,
(2) $G_1 \cap G_2 = \{ 1 \}$,
(3) $G = \langle G_1, G_2 \rangle = G_1 G_2$.

Un gruppo G con queste proprietà si dice *prodotto interno* di G_1 e G_2. La ragione è la seguente.

Mostrate che

(1) se $g_i \in G_i$, allora
$$g_1 g_2 = g_2 g_1,$$
(2) che ogni elemento di P si scrive *in modo unico* nella forma $g_1 g_2$, per $g_i \in G_i$, e
(3) che la funzione
$$\begin{aligned} \varphi : G_1 \times G_2 &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi fra il prodotto esterno e il prodotto interno di G_1 e G_2.

Esercizio 3.6 (Mi bastano gli enunciati).

Siano $G_1, \dots, G_n$ gruppi. Si consideri il prodotto cartesiano

$$C = G_1 \times \cdots \times G_n,$$

che diventa, con le operazioni per componenti, un gruppo, detto il *prodotto esterno* dei G_k

Per $k = 1, 2, \dots, n$ si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \iota_k : G_k &\to C \\ g &\mapsto (1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

ove g si trova nella posizione k.

Si mostri che ogni ι_k è un morfismo iniettivo di gruppi, dunque $X_k = \iota_k(G_k)$ è un sottogruppo di C isomorfo a G_k.

Per $k = 1, 2, \dots, n$ si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \pi_k : C &\to G_k \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto g_k. \end{aligned}$$

Si mostri che ogni π_k è un morfismo di gruppi, dunque $X_k = \bigcap \{ \ker(\pi_i) : i \neq k \}$ è un sottogruppo normale di C.

Si mostri che

(1) gli X_k sono sottogruppi normali di C,
(2) $C = X_1 X_2 \dots X_n$,
(3) per ogni k si ha

$$X_k \cap X_1 \cdots \widehat{X_k} \cdots X_n = \{ 1 \} .$$

Qui il simbolo $\widehat{X_k}$ indica che il termine X_k viene omesso.

Sia G un gruppo con sottogruppi X_k che soddisfano queste condizioni: si dice che G è *prodotto interno* degli X_k. Allora valgono

- per $i \neq j$, e $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$ si ha $x_i x_j = x_j x_i$,
- ogni elemento di G si scrive in modo unico nella forma $x_1 x_2 \dots x_n$, con $x_i \in X_i$.

Si mostri che se G è prodotto interno degli X_i, allora la funzione

$$\begin{aligned} f : X_1 \times \cdots \times X_n &\to G \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 \dots x_n \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Esercizio 3.7. Sia G un gruppo, $x \in G$ un elemento di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$.

(1) Si mostri che esistono elementi $y, z \in G$ tali che
    (a) $x = yz$,

(b) $|\, y\,| = a$, $|\, z\,| = b$,
(c) y e z sono potenze di x, dunque in particolare $yz = zy$.

Esercizio 3.8. Sia G un gruppo, e $g \in G$ di ordine finito
$$p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k},$$
dove i p_i sono primi distinti, e $e_i > 0$ per ogni i.

Si mostri che esistono $x_i \in G$, potenze di x, tali che

(1) $x = x_1 x_2 \cdots x_k$, e
(2) $|\, x_i\,| = p_i^{e_i}$ per ogni i.

(SUGGERIMENTO: Scriviamo $a = p_1^{e_1}$ e $b = p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Allora per l'esercizio 3.7 ci sono potenze x_1, y di x tali che $x = x_1 y$, $|\, x_1\,| = p_1^{e_1}$, e $|\, y\,| = p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Si proceda per induzione su k.)

Esercizio 3.9. Si trovino un gruppo G e un elemento $x \in G$ tale che x ha ordine ab, ma x non è prodotto di un elemento di ordine a e di un elemento di ordine b. (SUGGERIMENTO: Per l'esercizio 3.7, a e b *non* dovranno essere coprimi.)