TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 2

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 2.1 (Si riferisce a un argomento trattato la settimana precedente).

Sia G un gruppo, $H \leq G$.

(1) Mostrate che se $|\, G : H \,| = 2$, allora H è un sottogruppo normale di G.
(2) Mostrate che esistono gruppi G con un sottogruppo H di indice 3 che non è normale in G.

Esercizio 2.2 (Non ve lo chiedo nelle provette, ma è un prerequisito essenziale per il corso).

Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per i gruppi.

Esercizio 2.3. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di isomorfismo per i gruppi.

Esercizio 2.4. Sia G un gruppo e $H, K \leq G$.

(1) Si mostri con un esempio che in generale HK non è un sottogruppo di G
(2) Si mostri che sono equivalenti:
   (a) HK è un sottogruppo di G,
   (b) $KH \subseteq HK$, e
   (c) $KH = HK$.
(3) Si mostri che se N è un sottogruppo normale di G, allora $HN \leq G$.
(4) Si dia un esempio di sottogruppi $H, K \leq G$, nessuno dei due normale in G, tale che $HK \leq G$.

Esercizio 2.5. Sia G un gruppo, e $H, K \leq G$.

Si mostri che HK, che pur non è detto sia un sottogruppo di G, è unione di classi laterali sinistre di K.

Si mostri che c'è una biiezione fra

l'insieme delle classi laterali di K in HK,

e

l'insieme delle classi laterali di $H \cap K$ in H.

Se ne deduca l'eguaglianza di indici, se gli insiemi di cui sopra sono finiti,

$$|\, HK : K \,| = |\, H : H \cap K \,|,$$

e nel caso che G sia finito

$$|\, HK \,| = \frac{|\, H \,|\,|\, K \,|}{|\, H \cap K \,|}.$$

Esercizio 2.6 (Terzo teorema di isomorfismo: è enunciato nella forma "si mostri", ma serve solo che sappiate i risultati).

Sia G un gruppo, $N \trianglelefteq G$.

(1) Si mostri che ogni sottogruppo di G/N si scrive in modo unico come H/N, per un opportuno $N \leq H \leq G$.
(2) Si mostri che se $N \leq H \leq G$, allora sono equivalenti
   (a) $H \trianglelefteq G$, e
   (b) $H/N \trianglelefteq G/N$.
(3) Se $N \leq H \trianglelefteq G$, si mostri che esiste un isomorfismo

$$\frac{G/N}{H/N} \cong G/H.$$

Esercizio 2.7. Sia G un gruppo, $S \subseteq G$.

(1) Si mostri che

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ H : H \leq G, S \subseteq H \}$$

è il più piccolo sottogruppo di G che contenga S.
(2) Si mostri che $\langle \emptyset \rangle = \{ 1 \}$.
(3) Sia $a \in G$. Si mostri che

$$\langle a \rangle = \left\{ a^i : i \in \mathbf{Z} \right\}.$$