

TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 1

Avvertenza: alcuni esercizi potrebbero riferirsi a materiale non ancora trattato a lezione.

Esercizio 1.1 (Facoltativo). Consideriamo una terna (G, \cdot, e) , ove

- (1) “ \cdot ” è una operazione binaria, associativa su G ,
- (2) l’elemento $e \in G$ soddisfa $ae = a$ per ogni $a \in G$, e
- (3) per ogni $a \in G$ esiste $b \in G$ tale che $ab = e$.

Si mostri che (G, \cdot, e) è un gruppo.

Esercizio 1.2 (Facoltativo, ma una volta nella vita varrebbe la pena farlo). Sia M un insieme non vuoto, e “ \cdot ” un’operazione associativa su M .

Mostrate che comunque si mettano le parentesi, il prodotto

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

ha un unico significato, per n intero positivo, e $a_i \in M$.

(SUGGERIMENTO: La parte più complicata è forse definire cosa voglia dire mettere le parentesi. Definiamo un *prodotto competente* sugli elementi a_1, \dots, a_n (nell’ordine dato) ricorsivamente nel modo seguente. Se $n = 1$, l’unico prodotto competente è $P(a_1) = a_1$. Se $P(b_1, \dots, b_s)$ e $Q(c_1, \dots, c_t)$ sono prodotti competenti, allora $P(b_1, \dots, b_s) \cdot Q(c_1, \dots, c_t)$ è un prodotto competente su $b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t$. Ad esempio, tutti i prodotti competenti su a_1, a_2, a_3, a_4 sono

$$((a_1 a_2) a_3) a_4, (a_1 a_2) (a_3 a_4), a_1 ((a_2 a_3) a_4), (a_1 (a_2 a_3)) a_4, a_1 (a_2 (a_3 a_4)).$$

Ora si tratta di mostrare, procedendo per induzione su n , che tutti i prodotti competenti su $a_1 a_2 \cdots a_n$ sono eguali a $((\cdots (a_1 a_2) a_3) \cdots) a_n$, cioè al prodotto in cui si aprono tutte le parentesi all’inizio.

È utile guardare la pagina della Wikipedia sui Catalan numbers, che fra le altre cose contano proprio tutti questi prodotti competenti.)

Esercizio 1.3. Sia G un gruppo, $H \subseteq G$.

- (1) Si dica quando H è un sottogruppo di G .
- (2) Si mostri che sono equivalenti:
 - (a) H è un sottogruppo di G , e
 - (b)
 - (i) $H \neq \emptyset$, e
 - (ii) per ogni $x, y \in H$, allora $xy^{-1} \in H$.

Esercizio 1.4. Sia G un gruppo, e H un sottoinsieme non vuoto di G .

- Si mostri che se G è *finito*, e per ogni $x, y \in H$ si ha $xy \in H$, allora H è un sottogruppo di G .

(SUGGERIMENTO: Sia $a \in H$. Dato che H è finito, il periodo di a è finito, dunque esiste $n > 0$ tale che $a^n = 1$. Dunque $a^{-1} = a^{n-1}$, con $n - 1 \geq 0$.)

- Si trovino un gruppo G infinito, e un suo sottoinsieme H non vuoto, tale che per ogni $x, y \in H$ si ha $xy \in H$, ma H non è un sottogruppo di G .
(SUGGERIMENTO: Prendete $G = \mathbf{Z}$ e $H = \mathbf{N}$.)

Esercizio 1.5 (Non ve lo chiedo in esami/provette, ma useremo questi fatti ripetutamente). Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme. Sia M l'insieme delle funzioni su Ω . Si consideri l'operazione di composizione da sinistra a destra su M , dunque per $f, g \in M$ e $x \in \Omega$ si pone

$$x(f \circ g) = (xf)g.$$

- (1) Si mostri che \circ è associativa.
- (2) Si mostri che la funzione identica (o identità) $\mathbf{1}$ definita da

$$x\mathbf{1} = x, \quad \text{per } x \in \Omega$$

è un elemento neutro per \circ .

- (3) Si mostri che $f \in M$ ha un'inversa destra se e solo se è iniettiva.
- (4) Si mostri che $f \in M$ ha un'inversa sinistra se e solo se è suriettiva.
- (5) Si mostri che $f \in M$ è invertibile se e solo se è biiettiva.

Esercizio 1.6. Sia G un gruppo, $H \leq G$. Si consideri la relazione su G data, per $a, b \in G$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad ab^{-1} \in H.$$

- (1) Si mostri che G è una relazione di equivalenza su G .
- (2) Si mostri che la classe dell'elemento $a \in G$ è la *classe laterale destra* $Ha = \{ha : h \in H\}$. (Si veda l'Esercizio 1.11.)
- (3) Se ne deduca che l'insieme $\{Ha : a \in G\}$ è una partizione di G .
- (4) Si mostri che per ogni $a, b \in G$ esiste una biezione $Ha \rightarrow Hb$, sicché Ha e Hb hanno lo stesso numero di elementi.
- (5) Se G è finito, se ne deduca il Teorema di Lagrange:

Teorema. Se G è un gruppo finito, e $H \leq G$, allora

$$|G| = |H| \cdot |G : H|,$$

ove $|G : H|$ è l'indice di H in G , ovvero il numero di classi laterali destre di H in G . In particolare $|H|$ divide $|G|$.

Esercizio 1.7. Sia G un gruppo finito, $H \leq K \leq G$.

Si mostri, usando il Teorema di Lagrange, che

$$|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|.$$

Esercizio 1.8. Sia G un gruppo arbitrario, $H \leq K \leq G$.

- (1) Si mostri, che sono equivalenti i seguenti fatti
 - (a) $|G : H|$ è finito, e
 - (b) sono finiti $|G : K|$ e $|K : H|$,
- (2) Si mostri che se valgono le condizioni del punto precedente, allora

$$|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|.$$

Esercizio 1.9. Si riformuli l'Esercizio 1.6 a partire dalla relazione

$$aSb \quad \text{se e solo se} \quad a^{-1}b \in H.$$

̀In particolare

- (1) Si mostri che S è una relazione di equivalenza, e che la classe di $a \in G$ è la *classe laterale sinistra* aH .
- (2) Si mostri che se G è finito, il numero di classi laterali sinistre è eguale al numero di classi laterali destre.
- (3) Più in generale, se G è un gruppo qualsiasi, si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \sigma : \{ Ha : a \in G \} &\rightarrow \{ aH : a \in G \} \\ Ha &\mapsto a^{-1}H \end{aligned}$$

è ben definita, ed è una biiezione fra l'insieme delle classi laterali destre e quello delle classi laterali sinistre.

Esercizio 1.10 (Facoltativo, più che altro una curiosità). Sia G un gruppo, $H \subseteq G$. Si consideri la relazione su G data, per $a, b \in G$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad ab^{-1} \in H.$$

Si mostri che se R è una relazione di equivalenza, allora $H \leq G$.

Esercizio 1.11. Sia G un gruppo, e \mathcal{P} l'insieme dei sottoinsiemi di G .

Per ogni $g \in G$, consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} r_g : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} & l_g : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ A &\mapsto Ag & A &\mapsto gA \end{aligned}$$

ove $Ag = \{ ag : a \in A \}$, e similmente per gA .

Mostrate che r_g, l_g rispettano le inclusioni (cioè se $A \subseteq B$ allora $Ag \subseteq Bg$ e $gA \subseteq gB$), e che sono funzioni invertibili, con $r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$ e $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$.