DIARIO DEL CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI

A.A. 2021/22

DOCENTE: ANDREA CARANTI

Nota. La descrizione di lezioni non ancora svolte si deve intendere come una previsione/pianificazione.

Lezione 1. giovedí 16 settembre 2021 (3 ore)

Definizione di gruppo. Unicità di elemento neutro e inverso.

Definizioni alternative: è sufficiente richiedere che vi sia un'operazione associativa, un elemento neutro destro, e per ogni elemento un inverso destro.

Gruppi a partire da monoidi.

Il gruppo delle funzioni invertibili su un insieme: permutazioni

Sottogruppi: definizione equivalente.

Classi laterali destre e sinistre.

Teorema di Lagrange.

Sottogruppi normali. Gruppo quoziente.

Coniugio. Coniugio nei gruppi simmetrici.

Lezione 2. giovedí 23 settembre 2021 (3 ore)

Primo teorema di isomorfismo: nuclei e immagini di morfismi.

Secondo teorema di isomorfismo; in particolare, se $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G.

Conseguenza: se G è in gruppo finito, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G, e vale

$$|HN| = \frac{|H|\,|N|}{|H \cap N|}.$$

Se G è un gruppo arbitrario, e $H, K \leq G$, allora HK è unione di classi laterali sinistre di K, e si ha

$$|HK : K| = |H : H \cap K|\,.$$

L'eguaglianza

$$|G : K| = |G : H| \cdot |H : K|$$

nel caso generale, se G è un gruppo, e $H \leq K \leq G$.

Se $H, K \leq G$, allora HK è un sottogruppo di G se e solo se $KH \subseteq HK$ se e solo se $KH = HK$.

Un esempio di $H, K \leq G$, entrambi non normali, tali che $HK \leq G$.

Trento, A. A. 2021/22.

Terzo teorema di isomorfismo (teorema di corrispondenza). Include il fatto che se G è un gruppo, $N \trianglelefteq G$, $\pi : G \to G/N$ è il morfismo canonico, e $H \leq G$, allora

$$\pi^{-1}(\pi(H)) = HN$$

e $\pi(H) = HN/N$.

Sottogruppo $\langle\, S \,\rangle$ generato da un sottoinsieme $S \subseteq G$. Il caso in cui $S = \{\, a \,\}$: gruppi ciclici.

Un'applicazione del terzo teorema di isomorfismo: gruppi ciclici. (Solo accennato l'inizio.)

Lezione 3. giovedí 7 ottobre 2021 (3 ore)

Gruppi ciclici e loro sottogruppi. Un gruppo ciclico di ordine n ha uno e un solo sottogruppo di ordine d, per ogni divisore d di n.

Lemma sull'ordine della potenza di un elemento, e nuova dimostrazione.

Descrizione di $\langle\, S \,\rangle$: il caso abeliano. Nel caso $S = \{\, a \,\}$ si ritrovano i gruppi ciclici.

Ragionare mediante la definizione concettuale: se $f : G \to H$ è un morfismo, allora $f(\langle\, S \,\rangle) = \langle\, f(S) \,\rangle$.

Prodotti diretti interni ed esterni. Isomorfismo fra prodotto diretto interno ed esterno.

Prodotto diretto di più sottogruppi: caratterizzazione.

Un elemento di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$, si scrive come prodotto di un elemento di ordine a e di un elemento di ordine b, entrambi sue potenze.

Lemma: scrivere un elemento come prodotto di p-elementi, per vari primi p.

Un gruppo abeliano finito è prodotto diretto di p-gruppi (inizio).

Lezione 4. giovedí 14 ottobre 2021 (3 ore)

p-gruppi. Due esempio di p-gruppi infiniti. Lemma di Cauchy: un p-gruppo finito ha ordine una potenza di p.

Un gruppo abeliano finito è prodotto diretto di p-gruppi.

Associatività e commutatività del prodotto diretto.

Un p-gruppo abeliano è prodotto diretto di gruppi ciclici. Riduzione al Lemma dell'ordine massimo.

Lezione 5. venerdí 15 ottobre 2021 (2 ore)

Conclusione della dimostrazione del Lemma dell'ordine massimo.

Unicità nella decomposizione di un gruppo abeliano finito come prodotto di gruppi ciclici della forma

$$C(d_1) \times C(d_2) \times \cdots \times C(d_s),$$

ove $C(d)$ è ciclico di ordine d, $d_1 > 1$, e $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$..

Prodotti semidiretti: inizio.

Endomorfismi e automorfismi: se un endomorfismo ammette una funzione inversa, quest'ultima è ancora un endomorfismo.

Lezione 6. giovedí 21 ottobre 2021 (3 ore)

Prodotti semidiretti interni ed esterni.

L'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano. Endomorfismi ed automorfismi di un gruppo ciclico.

Lezione 7. giovedí 28 ottobre 2021 (3 ore)

Strutture di F-spazio vettoriale su un gruppo $(V, +, 0)$ come morfismi di anelli con unità $F \to \mathrm{End}(V)$.

Gruppi elementari abeliani: un gruppo elementare abeliano di ordine p^n è prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine p, e il suo gruppo di automorfismi è isomorfo al gruppo $\mathrm{GL}(n, p)$ delle matrici invertibili $n \times n$ sul campo con p elementi.

Automorfismi di prodotti diretti: il caso dei fattori caratteristici.

Struttura del gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico.

Lezione 8. giovedí 4 novembre 2021 (3 ore)

Applicazioni: se $\gcd(m, \varphi(n)) = 1$, l'unico prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine n per un gruppo di ordine m è quello diretto. Invece se $\gcd(m, \varphi(n)) > 1$ c''e sempre un prodotto semidiretto non diretto.

Richiami sul gruppo diedrale: unicità della rappresentazione.

Il gruppo diedrale come prodotto semidiretto esterno ed interno. Ho costruito il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico $K = \langle\, b \,\rangle$ di ordine n per un gruppo ciclico $H = \langle\, a \,\rangle$ di ordine 2 ponendo $\psi(a) = c \in \mathrm{Aut}(K)$, ove $c : x \mapsto x^{-1}$.

Un esempio (di cui ho fatto completamente solo il caso $p = 2$ qui sotto): Se $V = \langle\, a \,\rangle \times \langle\, b \,\rangle$, con $|a| = |b| = p$ primo, allora

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

è un automorfismo di ordine 3, dato che è radice del suo polinomio caratteristico $x^2 + x + 1$, e dunque

$$T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1) = 0;$$

T dà origine al gruppo

$$\left\langle\, a, b, t : a^p = b^p = [a, b] = 1, a^t = b, b^t = a^{-1}b^{-1} \,\right\rangle$$

di ordine $3p^2$. Quando $p = 2$, questo gruppo è isomorfo ad A_4; ricordare, per ora senza dimostrazione, la parità di una permutazione.

Primo cenno ai gruppi liberi.

Lezione 9. giovedí 18 novembre 2021 (3 ore)

Gruppi liberi: unicità a meno di isomorfismi.

Presentazioni. Un esempio:

$$S_3 \cong \left\langle\, a, b : a^3, b^2, (ab)^2 \,\right\rangle.$$

Azioni (destre) di un gruppo su un insieme. Le due definizioni, e la loro equivalenza.

Orbite, stabilizzatori, e il teorema orbita/stabilizzatore.

La rappresentazione regolare destra (inizio).

Lezione 10. venerdí 19 novembre 2021 (2 ore)

La rappresentazione regolare destra. È transitiva e gli stabilizzatori sono tutti banali.

Lemma sulla transitività.

La rappresentazione regolare sinistra. Antiomomorfismi e azioni sinistre.

Gli stabilizzatori degli elementi di un'orbita sono coniugati. Il nucleo di un'azione 'e l'intersezione di tutti gli stabilizzatori.

Azioni sui sottoinsiemi, e sui sottoinsiemi di fissata cardinalità.

Il gruppo diedrale di ordine 8 come gruppo di permutazioni su $\{1, 2, 3, 4\}$. Azione sui sottoinsiemi di ordine 2: lati e diagonali.

Restrizione della rappresentazione regolare destra a un sottogruppo: teorema di Lagrange.

Lezione 11. giovedí 25 novembre 2021 (3 ore)

Azione di un gruppo sulle classi laterali di un sottogruppo. Il teorema orbita/stabilizzatore come teorema di isomorfismo di azioni.

Rivedere la formula per l'ordine del prodotto di due sottogruppi in un gruppo finito.

Se Ω, Δ sono insiemi, e il gruppo G agisce su Ω, allora G agisce sull'insieme Δ^Ω delle funzioni da Ω a Δ mediante $f^g(x) = f(x^{g^{-1}})$. Azione sulle n-ple.

Lemma di Cauchy.

Azione per coniugio di un gruppo su se stesso, o su un sottogruppo normale: classi di coniugio, centralizzanti. Azione per coniugio sull'insieme dei sottogruppi: normalizzanti.

Permutazioni pari e dispari.

Il gruppo alterno A_n, formato dalle permutazioni pari, è un sottogruppo normale di indice 2 in S_n, per $n \geq 2$.

Le classi di coniugio di S_n corrispondono alle partizioni di n.

Classi di coniugio di S_4.

Il gruppo finito G agisca sull'insieme Ω. Sia $H \trianglelefteq G$. Sia $x \in \Omega$. Allora $\left|x^H\right|$ divide $\left|x^G\right|$, e si ha

$$\left|\alpha^H\right| = \frac{1}{|G : HG_x|} \left|\alpha^G\right|$$

Il gruppo finito G agisca sull'insieme Ω. Sia $H \leq G$ con $|G : H| = 2$ (e dunque $H \trianglelefteq G$) e $\alpha \in \Omega$. Si ha

$$\left|\alpha^H\right| = \begin{cases} \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \not\leq H \\ \frac{1}{2} \cdot \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \leq H \end{cases}$$

Classi di coniugio di A_4.

Lezione 12. giovedí 2 dicembre 2021 (3 ore)

Classi di coniugio di S_5.

Classi di coniugio e semplicità di A_5.

Azione sulle classi laterali: se il gruppo G ha un sottogruppo di indice n, allora G ha un sottogruppo normale di indice un multiplo di n e un divisore di $n!$. Conseguenza: un sottogruppo di indice il più piccolo primo che divida l'ordine del gruppo è normale. (Generalizza il caso di indice 2.)

Primo Teorema di Sylow (prima parte).

Teoremi di Lucas e di Kummer.

Equazione delle classi.

Il centro di un p-gruppo finito non banale è non banale. Conseguenza: se p è un primo, e G è un gruppo finito di ordine $p^e m$, con $e \geq 1$ e $p \nmid m$, allora G ha sottogruppi normali di ordine p^f per ogni $0 \leq f \leq e$.

Lezione 13. venerdí 3 dicembre 2021 (2 ore)

Primo Teorema di Sylow.

Se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano. Un gruppo di ordine p^2, con p un primo, è abeliano.

Un p-sottogruppo di Sylow è normale se e solo se è unico.

Secondo Teorema di Sylow.

Terzo teorema di Sylow.

Gruppi di ordine pq, con p, q primi distinti.

Lezione 14. giovedí 9 dicembre 2021 (3 ore)

Conseguenza: A_4 ha ordine 12, ma non ha un sottogruppo di ordine 6, nonostante 6 divida 12.

In un gruppo di ordine $p^2 q$, con p, q primi distinti, si ha che $n_p = 1$, oppure $n_q = 1$.

I gruppi di ordine minore di 60 non sono semplici non abeliani.

Un gruppo semplice di ordine 60 è isomorfo ad A_5.

Lezione 15. giovedí 16 dicembre 2021 (3 ore)

Blocchi. Gruppi di permutazioni primitivi. In un gruppo primitivo, gli stabilizzatori sono massimali.

Gruppi k-transitivi. S_n è n-transitivo, mentre A_n è $(n-2)$-transitivo. Se G è $(k+1)$-transitivo, allora ogni stabilizzatore G_α è k-transitivo.

Un gruppo 2-transitivo è primitivo.

Se G è un gruppo di permutazioni primitivo su Ω, e $\{ 1 \} \neq N \trianglelefteq G$, allora per $\alpha \in \Omega$ si ha che α^N è un blocco, dunque $\alpha^N = \Omega$.

Sia $n > 5$, e $\{ 1 \} \neq N \neq G = A_n$ un sottogruppo normale di $G = A_n$. Per lo stabilizzatore di n in G si ha $G_n = A_{n-1}$. Dato che A_{n-1} è semplice per ipotesi induttiva, si avrà $N \cap A_{n-1} = \{ 1 \}$.

N agisce regolarmente su $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$, dunque la funzione

$$\begin{aligned} f : N &\to \Omega \\ x &\mapsto n^x \end{aligned}$$

è una biiezione. Se $H = A_{n-1}$ agisce per coniugio su N, e in modo naturale su Ω, allora f è un isomorfismo di azioni, ove G agisce su N per coniugio. Dato che H agisce $(n-3)$-transitivamente su $\Omega \setminus \{ n \}$, ne segue che H agisce $(n-3)$-transitivamente su $f^{-1}(\Omega \setminus \{ n \}) = N \setminus \{ 1 \}$.

Gruppi di automorfismi di un gruppo N che agiscono k-transitivamente su $N \setminus \{ 1 \}$.

Semplicità di A_n, per $n \geq 5$.

Avvertenza

Per la dimostrazione che la parità di una permutazione è ben definita, e per la costruzione dei gruppi liberi (entrambi argomenti fuori programma) si può fare riferimento alle lezioni online che si trovano sulla pagina Moodle del corso.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Trento

Email address: andrea.caranti@unitn.it

URL: http://caranti.maths.unitn.it/