TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 11

Esercizio 11.1. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di Sylow.

Esercizio 11.2. Sia G un gruppo di ordine divisibile per un primo p, e sia S un p-sottogruppo di Sylow di G. Si mostri che sono equivalenti:

(1) $S \trianglelefteq G$, e
(2) S è l'unico p-sottogruppo di Sylow di G.

Esercizio 11.3. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Sylow.

Esercizio 11.4. Sia G un gruppo, e $H \le G$. Abbiamo visto che lo stabilizzatore di H nell'azione di G per coniugio sui sottogruppi di G è

$$N_G(H) = \left\{ g \in G : g^{-1}Hg = H \right\},$$

il normalizzante di H in G.

(1) Si mostri che $N_G(H)$ è un sottogruppo di G contenente H.
(2) Si mostri che $H \trianglelefteq N_G(H)$.
(3) Si mostri che $N_G(H)$ è il più grande sottogruppo di G contenente H, in cui H sia un sottogruppo normale.

Esercizio 11.5.

(1) Si mostri che un gruppo di ordine 15 è ciclico.
(2) Sia G un gruppo di ordine pq, con $p > q$ primi.
    (a) Si mostri che se $q \nmid p - 1$, allora G è ciclico.
    (b) Si mostri che se $q \mid p - 1$, allora ci sono gruppi non abeliani di ordine pq.
    (c) Facoltativamente, si mostri che a meno di isomorfismi c'è un unico gruppo non abeliano di ordine pq, se $q \mid p - 1$.
    (d) Si costruiscano gruppi non abeliani di ordine 21, 55 e $29 \cdot 7$.

Esercizio 11.6. Siano p, q primi distinti. Si mostri che se G è un gruppo di ordine p^2q, allora o $n_p = 1$, o $n_q = 1$.

Esercizio 11.7. Sia p un primo, e il gruppo finito G contenga k sottogruppi di ordine p.

Si mostri che G contiene esattamente $k(p - 1)$ elementi di ordine p.

Esercizio 11.8. Sia G un gruppo, $K \trianglelefteq G$, e $K \le H \le G$.

Si mostri che

$$N_{G/K}(H/K) = N_G(H)/K.$$

Esercizio 11.9. Si enunci e si dimostri l'argomento di Frattini (che comprende sia il lemma sulle azioni, che la conseguenza sui normalizzanti).

Esercizio 11.10. Si mostri che in un gruppo nilpotente i p-sottogruppi di Sylow sono normali.

Esercizio 11.11. Si mostri che i gruppi di ordine < 60 sono abeliani, o non semplici.
(SUGGERIMENTO: Per ora abbiamo fatto solo alcuni casi, che completiamo poi nelle prossime lezioni.)