

TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 10

Esercizio 10.1. Si enunci e si dimostri il Primo Teorema di Sylow.

Esercizio 10.2. Si enunci e si dimostri l'equazione delle classi.

Esercizio 10.3.

- (1) Si mostri che se $G \neq \{1\}$ è un p gruppo finito, per un primo p , allora $Z(G) \neq \{1\}$.
- (2) Sia G un p -gruppo finito. Si mostri che per ogni divisore d dell'ordine di G , esiste un sottogruppo *normale* di G di ordine d .

Esercizio 10.4. Si enunci e si dimostri il teorema di Lucas, e si mostri come ne segue l'esercizio precedente.

Esercizio 10.5 (Facoltativo).

Si enunci e si dimostri il teorema di Kummer.

Esercizio 10.6.

- (1) Sia G un gruppo. Si mostri che se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano
- (2) Sia p un primo. Si mostri che un gruppo di ordine p^2 è abeliano.