TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 9

Esercizio 9.1 (È già svolto nel seguito).

Questo esercizio spiega la scrittura di una permutazione come prodotto di cicli disgiunti.

Sia $G = \langle \sigma \rangle$ un gruppo ciclico di ordine k, che agisce su $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$.

Le orbite formano una partizione. Se α^G è una delle orbite, si ha

$$\alpha^G = \left\{ \alpha^{\sigma^i} : i \in \mathbf{Z} \right\} \subseteq \Omega.$$

Per il teorema orbita/stabilizzatore, questa orbita ha lunghezza un divisore h di $k = | G |$. Dato che è α^G è un insieme finito, ci sarà un più piccolo indice i per cui si ha una ripetizione $\alpha^{\sigma^i} = \alpha^{\sigma^j}$, con $j > i$, allora si ha

$$\alpha = \alpha^{\sigma^0} = \alpha^{\sigma j - i},$$

con $j - i > 0$, dunque $i = 0$, e il primo elemento che si ripete è α. Nella scrittura di una permutazione come prodotto di cicli disgiunti, questa orbita viene allora rappresentata dal ciclo

$$(\alpha, \alpha^\sigma, \dots, \alpha^{\sigma^{h-1}}).$$

Esercizio 9.2 (È l'ultimo del foglio precedente, svolto).

Il gruppo G agisca su se stesso per coniugio, dunque per $a, g \in G$ si ha

$$a^g = g^{-1} a g.$$

L'orbita

$$a^G = \{ a^g : g \in G \}$$

si dice la *classe di coniugio* di a in G. Lo stabilizzatore

$$G_a = \{ g \in G : a^g = a \} = \{ g \in G : ga = ag \}$$

si chiama il *centralizzante* di a in G, e si indica con

$$C_G(a).$$

Dato che lo stabilizzatore è un sottogruppo, e $a \in C_G(a)$, si ha $\langle a \rangle \leq C_G(a)$.

Se G è finito, il teorema orbita/stabilizzatore implica per $a \in G$

$$| G | = \left| a^G \right| \cdot | C_G(a) | .$$

Esercizio 9.3. Sia G un gruppo finito che agisce sull'insieme Ω, e sia $H \leq G$.

(1) Si mostri che anche H agisce naturalmente su Ω.
(Suggerimento: Questo l'ho menzionato già un paio di volte a lezione. Se G agisce su Ω, ho un morfismo $G \to S(\Omega)$. Componetelo con l'inclusione

$$\begin{aligned} \iota : H &\to G \\ h &\mapsto h \end{aligned}$$

per ottenere un morfismo $H \to S(\Omega)$, cioè un'azione di H su Ω.)

(2) Si mostri che per $\alpha \in \Omega$ si ha
$$\left| \alpha^H \right| = \frac{1}{|\,G\,| / |\,G_\alpha H\,|} \cdot \left| \alpha^G \right|.$$
(3) Si mostri con un esempio che $|\,G\,| / |\,G_\alpha H\,|$ può non essere un intero.
(4) Si mostri che se $H \trianglelefteq G$, allora $|\,G\,| / |\,G_\alpha H\,| = |\,G : G_\alpha H\,|$ è un intero.
(5) Si mostri che se $|\,G : H\,| = 2$, e dunque $H \trianglelefteq G$, allora
$$|\,G : G_\alpha H\,| = \begin{cases} 2 & \text{se } G_\alpha \leq H \\ 1 & \text{se } G_\alpha \not\leq H \end{cases}$$
(6) Si mostri che se $|\,G : H\,| = 2$, e dunque $H \trianglelefteq G$, allora
$$\left| \alpha^H \right| = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \left| \alpha^G \right| & \text{se } G_\alpha \leq H \\ \left| \alpha^G \right| & \text{se } G_\alpha \not\leq H \end{cases}$$
(7) Si elenchino le classi di coniugio di S_4 e A_4, indicando quanti elementi ha ciascuna.
(8) Si elenchino le classi di coniugio di S_5 e A_5, indicando quanti elementi ha ciascuna.
(9) Si mostri che A_5 è un gruppo semplice.

Esercizio 9.4.

(1) Sia G un gruppo, e H un sottogruppo di indice n. Mostrate che l'azione di G per moltiplicazione sull'insieme $\Omega = \{\, Ha : a \in G \,\}$ della classi laterali destre di H in G dà luogo a un morfismo $\varphi : G \to S_n$, con $\ker(\varphi) = H_G = \bigcap \{\, H^g : g \in G \,\}$.
(2) Mostrate che se H è un sottogruppo di indice n del gruppo G, allora esiste un sottogruppo $K \trianglelefteq G$ contenuto in H tale che
$$n \mid |\,G : K\,| \mid n!$$
(3) Sia G un gruppo finito, e p il più piccolo primo che divide l'ordine di G. Sia H un sottogruppo di G di indice p. Si mostri che H è normale in G.
(Come caso particolare, se G ha ordine pari, chiaramente 2 è il più piccolo primo che divide l'ordine di G. Dunque ritroviamo il fatto che un sottogruppo di indice 2 è normale in G.)

Esercizio 9.5. Sia G un gruppo finito di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$

Supponiamo che G abbia un sottogruppo normale A di ordine a.

Si mostri che A contiene tutti i sottogruppi di G di ordine un divisore di a. In particolare, A è l'unico sottogruppo del suo ordine in G, e dunque è caratteristico. (Suggerimento: Oltre alla dimostrazione vista a lezione, si consideri anche questa. Sia H un sottogruppo di ordine un divisore di a, e sia $h \in H$. Dunque h ha ordine un divisore di a. L'elemento hA del gruppo quoziente G/A, di ordine b, ha ordine da un lato un divisore di a, e dall'altro per Lagrange un divisore di b. Dunque $hA = A$, e $h \in A$.)

Esercizio 9.6. Si mostri che A_4 non ha un sottogruppo di ordine 6.