TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 8

Esercizio 8.1. Se il gruppo G agisce sull'insieme Ω, e $\alpha \in \Omega$, si mostri che G agisce in modo naturale sull'orbita α^G, e sull'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ delle parti di Ω.

Esercizio 8.2. Si definisca il nucleo di un'azione, e si mostri che coincide con l'intersezione di tutti gli stabilizzatori. Si definisca il concetto di azione fedele.

Esercizio 8.3. Sia $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, e

$$D_4 = \{ 1, (1234), (13)(24), (1432), (13), (24), (12)(34), (14)(23) \}$$

il gruppo diedrale.

(1) Dato $\{ 1, 3 \} \in \mathcal{P}(\Omega)$, si calcoli l'orbita $\Sigma = \{ 1, 3 \}^{D_4}$, mostrando che è $\{ \{ 1, 3 \}, \{ 2, 4 \} \}$.
(2) Si calcolino gli stabilizzatori e il nucleo dell'azione di D_4 su Σ.

Esercizio 8.4.

(1) Si definiscano la rappresentazione regolare destra e sinistra di un gruppo, e se ne calcolino orbite, stabilizzatori e nucleo.
(2) Si enunci e si dimostri il Teorema di Cayley.

Esercizio 8.5. Sia G un gruppo, e H un suo sottogruppo.

(1) Si mostri che le orbite dell'azione di H su G per moltiplicazione a destra sono le classi laterali *sinistre* di H in G.
(2) Si enunci e dimostri l'analoga affermazione per la moltiplicazione a sinistra.

Esercizio 8.6.

(1) Sia G un gruppo, $H \leq G$. Si consideri l'azione per moltiplicazione a destra di G su $\mathcal{P}(G)$.
   Si mostri che l'orbita di $H \subseteq G$ sotto questa azione è l'insieme
   $$G/H = \{ Hg : g \in G \}$$
   delle classi laterali destre di H in G.
(2) Sia G un gruppo, $\emptyset \neq L \subseteq G$.
   Si mostri che sono equivalenti:
   (a) L'orbita
   $$L^G = \{ Lg : g \in G \}$$
   di L sotto l'azione per moliplicazione destra di G su $\mathcal{P}(G)$ è una partizione di G, e
   (b) $L = Hx$, per qualche $H \leq G$ e $x \in G$.

   (SUGGERIMENTO: Se l'orbita è una partizione, ci sarà un $g \in G$ tale che $1 \in Lg = M$. Sarà $L^G = M^G$. Si mostri che $M \leq G$.)

Esercizio 8.7. Si enunci il concetto di isomorfismo di azioni, e si dia la formulazione in questi termini del Teorema Orbita/Stabilizzatore.

Esercizio 8.8. Sia G un gruppo, Ω, Δ insiemi, e G agisca su Ω. Sia Δ^{Ω} l'insieme delle funzioni da Ω a Δ.

Si mostri che ponendo

$$f^g(x) = f(x^{g^{-1}})$$

per $f \in \Delta^{\Omega}$, $x \in \Omega$, $g \in G$, si ottiene un'azione di G su Δ^{Ω}.

Esercizio 8.9. Si enunci e si dimostri il Lemma di Cauchy.

Esercizio 8.10. Si definisca l'azione di un gruppo su se stesso per coniugio, e si trovino orbite e stabilizzatori.