TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 7

Esercizio 7.1.

(1) Si definisca una base di un gruppo.
(2) Si mostri con un esmepio che non tutti i gruppi hanno una base.
(3) Si definisca un gruppo libero F su un insieme X. (Basta il caso in cui $X \subseteq F$.)
(4) Si mostri che $\{ 1 \}$ è un gruppo libero su $X = \emptyset$. (Qui il gruppo si intende moltiplicativo.)
(5) Si mostri che $\mathbf{Z}$ è un gruppo libero sull'insieme $X = \{ 1 \}$. (Ovviamente $\mathbf{Z}$ è un gruppo rispetto all'addizione.)
(6) Si mostri che il gruppo libero sull'insieme X è unico a meno di isomorfismi.
(7) Si mostri che se F è libero sull'insieme $X \subseteq F$, allora $F = \langle X \rangle$.

Esercizio 7.2. Si spieghi il significato della presentazione

$$\left\langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, abab = 1 \right\rangle,$$

e si mostri che essa definisce S_3.

Esercizio 7.3. Si mostri che la presentazione

$$G = \left\langle a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, a^b = a^{-1} \right\rangle$$

definisce un gruppo di ordine 8.
(Suggerimento: Consideriamo il sottogruppo $\langle a, b \rangle$ di S_4, dove $a = (1234)$ e $b = (24)$. O il gruppo diedrale di ordine 8, cioè il gruppo generato dagli elementi del gruppo delle permutazioni su $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ dati da $a : x \mapsto x + 1$ e $b : x \mapsto -x$.)

Esercizio 7.4. Si mostri che la presentazione

$$G = \left\langle a, b : a^2 = 1, b^3 = 1, (ab)^3 = 1 \right\rangle$$

definisce il gruppo alterno A_4.
(Suggerimento: (Il suggerimento, che poi è lo svolgimento, è in inglese, perché l'ho trascritto da un mio intervento su `Mathematics StackExchange`.)

A_4 satisfies the presentation: just take $a = (12)(34), b = (123)$, and note that $ab = (134)$.

So the presented group G has order *at least* 12, because it has A_4 as a homomorphic image. (For all we know at this stage, it might also be infinite.)

Now in G, note that the first relation and the second relation mean

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b^2 \tag{7.4.1}$$

also, note the consequences of the third relation:

$$bab = ab^{-1}a, \qquad aba = b^{-1}ab^{-1}. \tag{7.4.2}$$

Now consider the elements

$$a, b^{-1}ab,$$

and the subgroup $V = \langle a, b^{-1}ab \rangle$ they span in G. The two elements commute with each other, as (7.4.1) and (7.4.2) imply

$$a(b^{-1}ab) = (ab^{-1}a)b = (bab)b = bab^{-1} = b^{-1}(b^{-1}ab^{-1}) = b^{-1}(aba) = (b^{-1}ab)a.$$

Moreover, again by (7.4.1) and (7.4.2),

$$b^{-1}(b^{-1}ab)b = (bab)b = (ab^{-1}a)b = a(b^{-1}ab) \in V.$$

So V is a normal subgroup of G, of order at most 4, and the quotient group G/V is generated by b, of order 3, so G has order *at most* 12.

It follows that G has order precisely 12, and it is isomorphic to A_4.)

Esercizio 7.5. Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme, G un gruppo.

Si mostri che i seguenti due concetti sono equivalenti:

(1) una azione destra di G su Ω, dunque una funzione

$$\begin{aligned} \Omega \times G &\to \Omega \\ (\alpha, g) &\mapsto \alpha^g \end{aligned}$$

che soddisfi

$$\begin{cases} \alpha^1 = \alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \\ (\alpha^g)^h = \alpha^{gh} & \text{for } \alpha \in \Omega \text{ e } g, h \in G. \end{cases}$$

(2) un morfismo

$$\psi : G \to S(\Omega),$$

ove $S(\Omega)$ è il gruppo delle permutazioni (cioè delle funzioni biiettive) su Ω, con la composizione da-sinistra-a-destra.

Dunque occorre vedere come si passa da (1) a (2) e viceversa, e che applicando le procedure due volte si torna al punto di partenza.

Esercizio 7.6. Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme, G un gruppo.

Definiamo una azione *sinistra* di G su Ω come una funzione

$$\begin{aligned} \Omega \times G &\to \Omega \\ (\alpha, g) &\mapsto {}^g\alpha \end{aligned}$$

che soddisfi

$$\begin{cases} \alpha^1 = \alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \\ {}^g({}^h\alpha) = {}^{gh}\alpha & \text{for } \alpha \in \Omega \text{ e } g, h \in G. \end{cases}$$

(1) Mostrate, sulla falsariga dell'Esercizio 7.5, che una azione sinistra equivale a un antiomomorfismo

$$\psi : G \to S(\Omega),$$

ove $S(\Omega)$ è sempre il gruppo delle permutazioni (cioè delle funzioni biiettive) su Ω, con la composizione da-sinistra-a-destra. Dunque $\psi(gh) = \psi(h)\psi(g)$ per $g, h \in G$.

(2) Siano A, B gruppi. Si mostri che gli antiomomorfismi da A a B sono tutti e soli della forma
$$x \mapsto \psi(x^{-1}),$$
ove ψ è un morfismo usuale da A a B.

Esercizio 7.7. Il gruppo G agisca sull'insieme Ω. Per $\alpha \in \Omega$, sia
$$\alpha^G = \{ \alpha^g : g \in G \}$$
l'orbita di α sotto G.

(1) Si mostri che le orbite sono una partizione di Ω.
(2) Si mostri che G agisce in modo naturale su ogni orbita.
(3) Si mostri che se $\Delta \subseteq \Omega$ è tale che G agisce su Δ, allora Δ è unione di orbite.
(4) Si mostri che sono equivalenti
    (a) esiste $\alpha \in \Omega$ tale che $\alpha^G = \Omega$, e
    (b) per ogni $\alpha \in \Omega$ si ha che $\alpha^G = \Omega$.

Esercizio 7.8. Il gruppo G agisca sull'insieme Ω. Per $\alpha \in \Omega$, sia
$$G_\alpha = \{ g \in G : \alpha^g = \alpha \}$$
lo stabilizzatore di α in G.

(1) Si mostri che G_α è un sottogruppo di G.
(2) Si mostri che
$$G_{\alpha^g} = g^{-1} G_\alpha g.$$

Esercizio 7.9. Si enunci e si dimostri il Teorema Orbita-Stabilizzatore.