

TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 6

Esercizio 6.1. Sia G prodotto diretto interno dei gruppi H e K .

- (1) Si mostri che la funzione

$$\begin{aligned}\Phi : \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (hk \mapsto h^\alpha k^\beta)\end{aligned}$$

è un morfismo iniettivo.

- (2) Si definisca il concetto di sottogruppo caratteristico.
(3) Si mostri che se H, K sono caratteristici in G , allora Φ è anche suriettiva, e dunque un isomorfismo.
(4) Si enuncino senza dimostrazione i risultati precedenti per un numero arbitrario di fattori diretti
(5) Sia $n = p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$, con p_i primi distinti, e $e_i > 0$. Sia G un gruppo ciclico di ordine n . Si mostri che G è prodotto diretto di gruppi ciclici P_i di ordine $p_1^{e_1}, \dots, p_l^{e_l}$.
(6) Si mostri che

$$\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(P_1) \times \cdots \times \text{Aut}(P_l).$$

Esercizio 6.2. Sia L un gruppo e $H = \langle a \rangle$ un gruppo ciclico di ordine m .

- (1) Si mostri che se $\psi : H \rightarrow L$ è un morfismo, allora $\psi(a)$ è un elemento di L di ordine un divisore di m .
(2) Si mostri che se $c \in L$ è un elemento di ordine un divisore di m , allora esiste un unico morfismo $\psi : H \rightarrow L$ tale che $\psi(a) = c$.

Esercizio 6.3. Sia G un gruppo. Si mostri che sono equivalenti

- (1) la funzione

$$\begin{aligned}G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

è un morfismo, e

- (2) G è abeliano.

Esercizio 6.4 (Del tutto facoltativo, ma sarebbe uno degli ingredienti del prossimo).

Sia G un gruppo, e $\varphi, \psi \in \text{End}(G)$. Mostrate che sono equivalenti:

- (1) $\varphi + \psi \in \text{End}(G)$,
(2) $g^\varphi h^\psi = h^\psi g^\varphi$ per ogni $g, h \in G$, e
(3) $[g^\varphi, h^\psi] = 1$ per ogni $g, h \in G$.

Se valgono queste condizioni, allora $\varphi + \psi = \psi + \varphi$.

Esercizio 6.5 (Di questo non vi chiedo i dettagli, ma vi raccomando caldamente di farlo una volta nella vostra vita (matematica)).

Sia G un gruppo, e $\text{End}(G)$ l'insieme dei suoi endomorfismi.

Si definiscano su $\text{End}(G)$ le operazioni di

(1) somma, come

$$x^{f+g} = x^f \cdot x^g,$$

(2) prodotto come composizione

$$x^{f \circ g} = (x^f)^g,$$

per $x \in G$, e $f, g \in \text{End}(G)$.

Si mostri che se G è abeliano, allora $(\text{End}(G), +, \circ)$ è un anello con unità.

Esercizio 6.6. Sia V un gruppo abeliano, e F un campo.

Si mostri che è equivalente dare

- (1) una struttura di F -spazio vettoriale su V , e
- (2) un morfismo di anelli con unità $F \rightarrow \text{End}(V)$.

Esercizio 6.7. Si costruisca il gruppo diedrale D_n di ordine $2n$

- (1) come prodotto semidiretto esterno di un gruppo ciclico di ordine n per un gruppo ciclico di ordine 2, e
- (2) come gruppo di funzioni su $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, e dunque come prodotto semidiretto interno.

Esercizio 6.8. Sia K un gruppo ciclico di ordine 7, e H un gruppo ciclico di ordine 3.

Si costruisca un prodotto semidiretto non diretto di K mediante H .