TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 5

Esercizio 5.1. Sia P un p-gruppo abeliano finito.

Sia $a \in P$ un elemento di ordine massimo, cioè tale che $|\,x\,| \leq |\,a\,|$ per ogni $x \in G$.

Si mostri che esiste un sottogruppo B di P tale che P è prodotto diretto interno di $\langle\, a\,\rangle$ e B, dunque

$$P \cong \langle\, a\,\rangle \times B.$$

Esercizio 5.2. Siano A, B, C gruppi.

(1) Si mostri che

$$\begin{aligned} f : A \times B &\to B \times A \\ (a, b) &\mapsto (b, a) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Questo si può esprimere dicendo che il prodotto diretto è *commutativo*.

(2) Si mostri che

$$\begin{aligned} g : (A \times B) \times C &\to A \times (B \times C) \\ ((a, b), c) &\mapsto (a, (b, c)) \end{aligned}$$

è un isomorfismo, e che

$$\begin{aligned} h : (A \times B) \times C &\to A \times B \times C \\ ((a, b), c) &\mapsto (a, b, c) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Questo si può esprimere dicendo che il prodotto diretto è *associativo*.

Esercizio 5.3.

(1) Mostrate che ogni p-gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici.
(2) Mostrate che ogni gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici.

Esercizio 5.4. Trovate tutte le partizioni di n, per $n = 1, 2, \dots, 9$.

Determinate, a meno di isomorfismi, i p-gruppi finiti di ordine p^n, ove p è un primo, e $1 \leq n \leq 9$.

Esercizio 5.5. Definite il concetto di partizione duale $e^\star$ di una partizione e (guardate la definizione formale sugli appunti), e mostrate che $(e^\star)^\star = e$.

Esercizio 5.6 (Facoltativo). Sia p un primo, l, n interi positivi, ed $e = (e_1, \dots, e_l)$ una partizione di n, dunque $e_1 + \cdots + e_l = n$, e $e_1 \geq \cdots \geq e_l > 0$.

Sia $P_i = \langle\, x_i\,\rangle$ un gruppo ciclico di ordine p^{e_i}, per $1 \leq i \leq l$, e

$$P = \prod_{i=1}^{l} P_i.$$

Sia $e^\star$ la partizione duale di e.
Mostrate che

$$p^{e_1^\star+\dots+e_i^\star} = \left| \left\{ x \in P : x^{p^i} = 1 \right\} \right|.$$

(Suggerimento: Verificate che

$$\left\{ x \in P : x^p = x^{p^1} = 1 \right\} = \prod_{i=1}^{l} \left\langle x_i^{p^{e_i-1}} \right\rangle$$

ha ordine $p^l = p^{e_1^\star}$. Provate a continuare.)

Esercizio 5.7. Determinate, a meno di isomorfismi, i gruppi abeliani finiti di ordine

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2,$$

e dite quanti sono.

Esercizio 5.8.

(1) Siano A, B, C gruppi, $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ morfismi.
 (a) Si mostri che la composizione (da destra a sinistra) $\varphi \circ \psi : AtoC$ è un morfismo.
 (b) Si mostri che se φ, ψ sono isomorfismi, allora anche $\varphi \circ \psi$ lo è.
 (c) Si mostri che se φ è un isomorfismo (dunque in particolare una funzione biiettiva, che dunque ha una inversa φ^{-1}), allora anche $\varphi^{-1} : B \to A$ lo è.

(2) Sia G un gruppo, $\mathrm{End}(G)$ l'insieme degli *endomorfismi* di G, cioè dei morfismi $G \to G$.
 (a) Si mostri che $\mathrm{End}(G)$ è un monoide rispetto alla composizione.
 (b) Si mostri che il gruppo degli elementi invertibili del monoide $\mathrm{End}(G)$ è il gruppo degli *automorfismi* di G, ovvero degli isomorfismi $G \to G$.

Esercizio 5.9. Sia G un gruppo,

(1) $H \le G$, $K \trianglelefteq G$,
(2) $G = \langle H, K \rangle = HK$, e
(3) $H \cap K = \{ 1 \}$.

(a) Si mostri che se $h_i \in H$, $k_i \in K$, abbiamo

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = (h_1h_2)(k_1^{h_2}k_2),$$

con $h_1h_2 \in H$, e $k_1^{h_2}k_2 \in K$ dato che K è un sottogruppo normale. (Qui $k_1^{h_2} = h_2^{-1}k_1h_2$.)

(b) Si mostri che per $h \in H$ fissato, la funzione

$$\begin{aligned} \varphi(h) : K &\to K \\ k &\to k^h = h^{-1}kh \end{aligned}$$

è un automorfismo di K.

(c) Mostrate che la funzione

$$\begin{aligned} \varphi : H &\to \mathrm{Aut}(K) \\ h &\mapsto (k \to k^h) \end{aligned}$$

è un morfismo di gruppi.

Viceversa, siano H, K gruppi, e $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(K)$ un morfismo. Consideriamo l'*insieme* $H \times K$, con l'operazione data da

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{\varphi(h_2)} k_2),$$

ove $k^{\varphi(h)}$ indica l'azione su $k \in K$ dell'automorfismo $\varphi(h)$.

(i) Mostrate che con questa operazione l'insieme $H \times K$ diventa un gruppo, che si indica con $K \rtimes_\varphi H$ o $H \ltimes_\varphi K$ (omettendo la φ se è implicita), e si chiama *prodotto semidiretto esterno di K mediante H attraverso φ.*

(ii) Mostrate che $H' = \{ (h, 1) : h \in H \}$ e $K' = \{ (1, k) : k \in K \}$ sono sottogruppi di $H \ltimes_\varphi K$ isomorfi rispettivamente a K e H.

(iii) Mostrate che si ha
$$(1, k)^{(h,1)} = (1, k^{\varphi(h)}),$$
e dunque $H \ltimes_\varphi K$ è prodotto semidiretto interno di K' mediante H', attraverso il morfismo φ, o più precisamente il morfismo
$$\begin{aligned} \varphi' : H' &\to \mathrm{Aut}(K') \\ (h, 1) &\mapsto ((1, k) \mapsto (1, k^{\varphi(h)})). \end{aligned}$$

Esercizio 5.10.

(1) Si mostri che il monoide degli endomorfismi di un gruppo ciclico di ordine n è isomorfo al monoide $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ rispetto al prodotto.

(2) Si mostri che il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico di ordine n è isomorfo al gruppo $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ delle unità dell'anello $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, e dunque ha ordine $\varphi(n)$, ove φ è la funzione di Eulero.