TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 4

Esercizio 4.1. Siano G_1, G_2 gruppi.

(1) Mostrate che il prodotto cartesiano
$$G_1 \times G_2 = \{ (g_1, g_2) : g_i \in G_i \}$$
diventa un gruppo, che chiamiamo *prodotto esterno* dei due gruppi, con le operazioni per componenti
$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2).$$

(2) Consideriamo i sottoinsiemi
$$G_1' = \{ (g_1, 1) : g_1 \in G_1 \}, \qquad G_2' = \{ (1, g_2) : g_2 \in G_2 \}$$
di $P = G_1 \times G_2$.
   (a) Mostrate che $G_i \cong G_i'$, ove "$\cong$" è il simbolo per l'isomorfismo.
   (b) Mostrate che $G_i' \trianglelefteq P$,
   (c) Mostrate che $G_1' \cap G_2' = \{ 1 \}$,
   (d) Mostrate che $G_1' G_2' = P$.
   (e) Mostrare che ogni elemento di P si scrive in modo unico come $x_1 x_2$, per $x_i \in G_i'$.

Esercizio 4.2. Sia G un gruppo che contiene due sottogruppi G_1, G_2 tali che

(1) $G_i \trianglelefteq P$,
(2) $G_1 \cap G_2 = \{ 1 \}$,
(3) $G = \langle G_1, G_2 \rangle = G_1 G_2$.

Un gruppo G con queste proprietà si dice *prodotto interno* di G_1 e G_2. La ragione è la seguente.

Mostrate che

(1) se $g_i \in G_i$, allora
$$g_1 g_2 = g_2 g_1,$$
(2) che ogni elemento di P si scrive *in modo unico* nella forma $g_1 g_2$, per $g_i \in G_i$, e
(3) che la funzione
$$\begin{aligned} \varphi : G_1 \times G_2 &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$
è un isomorfismo di gruppi fra il prodotto esterno e il prodotto interno di G_1 e G_2.

Esercizio 4.3 (Mi bastano gli enunciati).

Siano $G_1, \dots, G_n$ gruppi. Si consideri il prodotto cartesiano
$$C = G_1 \times \cdots \times G_n,$$

che diventa, con le operazioni per componenti, un gruppo, detto il *prodotto esterno* dei G_k

Per $k = 1, 2, \dots, n$ si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \iota_k : G_k &\to C \\ g &\mapsto (1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

ove g si trova nella posizione k.

Si mostri che ogni ι_k è un morfismo iniettivo di gruppi, dunque $X_k = \iota_k(G_k)$ è un sottogruppo di C isomorfo a G_k.

Per $k = 1, 2, \dots, n$ si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \pi_k : C \to G_k &\to C \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto g_k. \end{aligned}$$

Si mostri che ogni π_k è un morfismo di gruppi, dunque $X_k = \bigcap \{ \ker(\pi_i) : i \neq k \}$ è un sottogruppo normale di C.

Si mostri che

(1) gli X_k sono sottogruppi normali di C,
(2) $C = X_1 X_2 \dots X_n$,
(3) per ogni k si ha

$$X_k \cap X_1 \cdots \widehat{X_k} \cdots X_n = \{ 1 \} .$$

Qui il simbolo $\widehat{X_k}$ indica che il termine X_k viene omesso.

Sia G un gruppo con sottogruppi X_k che soddisfano queste condizioni: si dice che G è *prodotto interno* degli X_k. Allora valgono

- per $i \neq j$, e $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$ si ha $x_i x_j = x_j x_i$,
- ogni elemento di G si scrive in modo unico nella forma $x_1 x_2 \dots x_n$, con $x_i \in X_i$.

Si mostri che se G è prodotto interno degli X_i, allora la funzione

$$\begin{aligned} f : X_1 \times \dots \times X_n &\to G \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 \dots x_n \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Esercizio 4.4. Sia G un gruppo, $a, b \in G$, e si definisca il commutatore

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b.$$

(1) Si mostri che

$$ba[a, b] = ab.$$

(2) Si mostri che $[a, b]^{-1} = [b, a]$.

(3) Si mostri che
$$[a, b] = a^{-1}a^b = (b^{-1})^a b,$$
ove $x^y = y^{-1}xy$ indica il coniugato.

(4) Si mostri che sono equivalenti, per $H \le G$:
   (a) $H \trianglelefteq G$, e
   (b) per ogni $a \in H$ e ogni $b \in G$ si ha $[a, b] \in H$.

Esercizio 4.5. Sia G un gruppo, e $a \in G$ un elemento di periodo finito n. Per $k \in \mathbf{Z}$, si mostri che il periodo di a^k è
$$\frac{n}{\gcd(n, k)}.$$

Esercizio 4.6. Sia G un gruppo, $x \in G$ un elemento di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$.

(1) Si mostri che esistono elementi $y, z \in G$ tali che
   (a) $x = yz$,
   (b) $|\, y \,| = a$, $|\, z \,| = b$,
   (c) y e z sono potenze di x, dunque in particolare $yz = zy$.

(2) Si mostri che $\langle\, x \,\rangle$ è prodotto diretto interno di $\langle\, y \,\rangle$ e $\langle\, z \,\rangle$.
(Suggerimento: Di quest'ultimo punto a lezione abbiamo visto il caso particolare in cui $a = 3$, $b = 2$, ma questo caso generale non è più complicato.)

Esercizio 4.7. Sia G un gruppo, e $g \in G$ di ordine finito
$$p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k},$$
dove i p_i sono primi distinti, e $e_i > 0$ per ogni i.

Si mostri che esistono $x_i \in G$, potenze di x, tali che

(1) $x = x_1 x_2 \cdots x_k$, e
(2) $|\, x_i \,| = p_i^{e_i}$ per ogni i.

(Suggerimento: Scriviamo $a = p_1^{e_1}$ e $b = p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Allora per l'esercizio 4.6 ci sono potenze x_1, y di x tali che $x = x_1 y$, $|\, x_1 \,| = p_1^{e_1}$, e $|\, y \,| = p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Si proceda per induzione su k.)

Esercizio 4.8. Si trovino un gruppo G e un elemento $x \in G$ tale che x ha ordine ab, ma x non è prodotto di un elemento di ordine a e di un elemento di ordine b. (Suggerimento: Per l'esercizio 4.6, a e b *non* dovranno essere coprimi.)

Esercizio 4.9. Sia p un numero primo. Utilizzando il Lemma di Cauchy, si mostri che per un gruppo finito P sono equivalenti:

(1) ogni elemento ha ordine una potenza di p, e
(2) P ha ordine una potenza di p.

Un gruppo che soddisfi la prima condizione si dice *p-gruppo*.

Esercizio 4.10. Sia G un gruppo abeliano,
$$|\, G \,| = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t},$$
con p_i primi distinti, e $e_i > 0$ per ogni i.

Per ogni i, si ponga
$$P_i = \left\{ x \in G : x^{p_i^{e_i}} = 1 \right\}.$$

(1) Si mostri che ogni P_i è un sottogruppo di G, di ordine una potenza di p_i.
(2) Si mostri che
$$G = P_1 P_2 \cdots P_t.$$
(3) Si mostri che per ogni i si ha
$$P_i \cap P_1 \cdots \widehat{P_i} \cdots P_t = \{ 1 \}.$$
(4) Se ne deduca che P è prodotto diretto interno dei P_i.
(5) Se ne deduca che $|\, P_i \,| = p_i^{e_i}$ per ogni i.