TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 3

Esercizio 3.1 (Terzo teorema di isomorfismo)*.* Sia G un gruppo, $N \trianglelefteq G$.

(1) Si mostri che ogni sottogruppo di G/N si scrive in modo unico come H/N, per un opportuno $N \leq H \leq G$.

(2) Si mostri che se $N \leq H \leq G$, allora sono equivalenti
   (a) $H \trianglelefteq G$, e
   (b) $H/N \trianglelefteq G/N$.

(3) Se $N \leq H \trianglelefteq G$, si mostri che esiste un isomorfismo
$$\frac{G/N}{H/N} \cong G/H.$$

Esercizio 3.2*.* (Se serve, c'è negli appunti)

(1) Sia G un gruppo, $K, N \trianglelefteq G$. Si mostri che sono equivalenti:
   (a) la funzione
$$\begin{aligned} G/N &\to G/K \\ gN &\mapsto gK \end{aligned}$$
   è ben definita, e
   (b) $N \leq K$.

(2) Siano G, H gruppi, $f : G \to H$ un morfismo, $K = \ker(f)$, e $N \trianglelefteq G$. Si mostri che sono equivalenti:
   (a) la funzione
$$\begin{aligned} G/N &\to H \\ gN &\mapsto f(g) \end{aligned}$$
   è ben definita, e
   (b) $N \leq K$.

Esercizio 3.3*.*

Sia G un gruppo.

(1) Se $\mathcal{H}$ è un insieme di sottogruppi di G, si mostri che $\bigcap \mathcal{H}$ è un sottogruppo di G.

(2) Se $H, K \leq G$, si mostri che $H \cup K$ è un sottogruppo di G se e solo se $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

(3) Sia $S \subseteq G$. Si definisca
$$\langle\, S \,\rangle = \cap \{\, H \leq G : H \supseteq S \,\}\,.$$
   Si mostri che valgono
   (a) $S \subseteq \langle\, S \,\rangle \leq G$,
   (b) se $S \subseteq H \leq G$, allora $\langle\, S \,\rangle \leq H$.
   Dunque $\langle\, S \,\rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G che contenga S.

(4) Siano G, H gruppi, $f : G \to H$ un morfismo, $S \subseteq G$. Si mostri che

$$\langle f(S) \rangle = f(\langle S \rangle). \tag{3.3.1}$$

(5) Sia G un gruppo, $S \subseteq G$. Si mostri che

$$\langle S \rangle = \{ s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbf{N}, s_i \in S, \varepsilon_i \in \{ 1, -1 \} \}.$$

(6) Si usi quest'ultimo risultato per ridimostrare la formula (3.3.1).

(7) Sia G un gruppo abeliano, $S = \{ s_1, \dots, s_n \} \subseteq G$. Si mostri che

$$\langle S \rangle = \{ s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} : s_i \in S, e_i \in \mathbf{Z} \}.$$

(8) Sia $S = \{ s \} \subseteq G$. Si mostri che

$$\langle S \rangle = \langle s \rangle = \{ s^e : e \in \mathbf{Z} \}.$$

Esercizio 3.4. (Lo faccio giovedí 8.)

(1) Si descrivano, usando il terzo teorema di isomorfismo, i sottogruppi di $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, per $n > 0$, dicendone anche l'ordine.

(2) Sia a un elemento di ordine n in un gruppo, e sia $k \in \mathbf{Z}$. Si mostri che l'ordine di a^k è

$$\frac{n}{\gcd(n, k)}.$$

(3) Si descrivano i sottogruppi di un gruppo ciclico finito $\langle a \rangle$ di ordine n

   (a) prima definendo ed usando un isomorfismo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \langle a \rangle$,

   (b) poi direttamente.

   (Suggerimento: Per quel che riguarda l'ultimo punto, notiamo intanto che se $m \mid n$, allora $\left| a^{n/m} \right| = m$ per l'esercizio precedente. Dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle$ è un sottogruppo di ordine m. Sia ora H un sottogruppo di $\langle a \rangle$ di ordine m, e dunque indice n/m. Dato che $\langle a \rangle$ è ciclico, è anche abeliano, dunque ogni sottogruppo è normale. Il gruppo quoziente $\langle a \rangle / H$ ha ordine n/m, dunque ogni suo elemento elevato alla potenza n/m è eguale all'elemento neutro $1H = H$. In particolare $(aH)^{n/m} = a^{n/m}H = H$, ovvero $a^{n/m} \in H$. Dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle \leq H$. Siccome entrambi i sottogruppi hanno ordine m, sono eguali, $\left\langle a^{n/m} \right\rangle = H$, e dunque $\left\langle a^{n/m} \right\rangle$ è l'unico sottogruppo di ordine m di $\langle a \rangle$.)