TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 2

Esercizio 2.1 (Non ve lo chiedo nelle provette, ma è un prerequisito essenziale per il corso).

Sia G un gruppo, N un suo sottogruppo. Si mostri che sono equivalenti

(1) $aN = Na$ per ogni $a \in G$,
(2) $a^{-1}Na = N$ per ogni $a \in G$,
(3) $a^{-1}Na \subseteq N$ per ogni $a \in G$,
(4) $a^{-1}xa \in N$ per ogni $a \in G$ e $x \in N$.

Un sottogruppo $N \leq G$ che soddisfi queste condizioni equivalenti si dice *normale* in G, in simboli $N \trianglelefteq G$. (In genere si usa la prima come definizione.)

Esercizio 2.2 (Non ve lo chiedo nelle provette, ma è un prerequisito essenziale per il corso).

Sia G un gruppo, e $N \trianglelefteq G$. Mostrate che l'operazione

$$aN \cdot bN = abN$$

fra classi laterali è ben definita, e con essa

$$G/N = \{ aN : a \in G \}$$

diventa un gruppo, con $N = 1N$ come elemento neutro, e $(aN)^{-1} = a^{-1}N$. (Suggerimento: Il punto essenziale è mostrare che l'operazione sia ben definita, ma per favore rivedete tutti i dettagli.)

Esercizio 2.3. Sia G un gruppo $H \leq G$. Supponiamo che l'operazione

$$aH * bH = abH$$

fra le classi laterali sinistre di H sia ben definita.

Mostrate che $H \trianglelefteq G$.
(Suggerimento: L'ipotesi dice che per ogni $h, k \in H$, si ha $ah \cdot bk \in abH$.)

Esercizio 2.4 (Questo l'avete senz'altro visto ad Algebra A+B, serve per ricordarlo).

Siano G, H gruppi, e $\varphi : G \to H$ un morfismo di gruppi, cioè una funzione tale che $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, per $x, y \in G$.

Mostrate che

(1) $\varphi(1) = 1$,
(2) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, per ogni $x \in G$.

Esercizio 2.5 (Si riferisce a un argomento trattato la settimana precedente).

Sia G un gruppo, $H \leq G$.

(1) Mostrate che se $|\, G : H \,| = 2$, allora H è un sottogruppo normale di G.
(2) Mostrate che esistono gruppi G con un sottogruppo H di indice 3 che non è normale in G.

Esercizio 2.6. [Non ve lo chiedo nelle provette, ma è un prerequisito essenziale per il corso]

Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per i gruppi.

Esercizio 2.7. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di isomorfismo per i gruppi.

Esercizio 2.8. Sia G un gruppo e $H, K \leq G$.

(1) Si mostri con un esempio che in generale HK non è un sottogruppo di G
(2) Si mostri che sono equivalenti:
   (a) HK è un sottogruppo di G,
   (b) $KH \subseteq HK$, e
   (c) $KH = HK$.
(3) Si mostri che se N è un sottogruppo normale di G, allora $HN \leq G$.
(4) Si dia un esempio di sottogruppi $H, K \leq G$, nessuno dei due normale in G, tale che $HK \leq G$.

Esercizio 2.9. Sia G un gruppo, e $H, K \leq G$.

Si mostri che HK, che pur non è detto sia un sottogruppo di G, è unione di classi laterali sinistre di K.

Si mostri che c'è una biiezione fra

l'insieme delle classi laterali di K in HK,

e

l'insieme delle classi laterali di $H \cap K$ in H.

Se ne deduca l'eguaglianza di indici, se gli insiemi di cui sopra sono finiti,

$$|\, HK : K \,| = |\, H : H \cap K \,|,$$

e nel caso che G sia finito

$$|\, HK \,| = \frac{|\, H \,|\, |\, K \,|}{|\, H \cap K \,|}.$$

Esercizio 2.10 (Una raccolta di fatti che tornano spesso utili, vi chiedo solo quelli che userò effettivamente a lezione).

Siano A, B insiemi, $f : A \to B$ una funzione.

Per $L \subseteq A$, si definisca $f(L) = \{\, f(x) : x \in A \,\}$.

Per $M \subseteq B$, si definisca $f^{-1}(M) = \{\, x \in A : f(x) \in M \,\}$.

Si hanno i fatti seguenti.

(1) Se $L, M \subseteq A$, allora
   (a) $f(L \cup M) = f(L) \cup f(M)$, e
   (b) $f(L \cap M) \subseteq f(L) \cap f(M)$.
(2) Se $L, M \subseteq B$, allora
   (a) $f^{-1}(L \cup M) = f^{-1}(L) \cup f^{-1}(M)$, e
   (b) $f^{-1}(L \cap M) = f^{-1}(L) \cap f^{-1}(M)$.
(3) Se $L \subseteq A$, allora $f^{-1}(f(L)) \supseteq L$, e se f è iniettiva, allora vale l'eguaglianza.
(4) Si consideri la solita relazione (di equivalenza) su A data da $xRy \iff f(x) = f(y)$. Se $L \subseteq A$, allora

$$f^{-1}(f(L)) = \{\, x \in A : xRb \text{ per qualche } b \in L \,\} = \bigcup \{\, [a] : a \in L \,\},$$

ove $[a] = \{\, x \in A : xRa \,\}$ è la classe di equivalenza di a rispetto a R.

(5) Se $M \subseteq B$, allora $f(f^{-1}(M)) = M \cap f(A) \subseteq M$. Dunque se f è suriettiva, allora vale $f(f^{-1}(M)) = M$ per ogni $M \subseteq C$. (Per un singolo M, è sufficiente che valga $M \subseteq f(A)$.)

(6) Come caso particolare, se $L \subseteq A$, si ha

$$f(f^{-1}(f(L))) = f(L).$$

Si possono facilmente costruire esempi per vedere che le diseguaglianze date non sono sempre eguaglianze. Per (1b) basta considerare $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha $\{\, 1 \,\} \cap \{\, -1 \,\} = \emptyset$, ma $\{\, f(1) \,\} = \{\, f(-1) \,\} = \{\, 1 \,\}$. Per (3) basta una funzione non iniettiva quale la f appena usata, $f^{-1}(f(\{\, 1 \,\})) = \{\, 1, -1 \,\}$. Per (5) basta una funzione non suriettiva, e di nuovo va bene la stessa f, infatti $f(f^{-1}(\mathbf{Z})) = \mathbf{N}$.