TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI
FOGLIO DI ESERCIZI # 1

Esercizio 1.1 (Facoltativo). Consideriamo una terna $(G, \cdot, e)$, ove

(1) "$\cdot$" è una operazione binaria, associativa su G,
(2) l'elemento $e \in G$ soddisfa $ae = a$ per ogni $a \in G$, e
(3) per ogni $a \in G$ esiste $b \in G$ tale che $ab = e$.

Si mostri che $(G, \cdot, e)$ è un gruppo.

Esercizio 1.2 (Facoltativo, ma una volta nella vita varrebbe la pena farlo). Sia M un insieme non vuoto, e "$\cdot$" un'operazione associativa su M.

Mostrate che comunque si mettano le parentesi, il prodotto

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

ha un unico significato, per n intero positivo, e $a_i \in M$.
(Suggerimento: La parte più complicata è forse definire cosa voglia dire mettere le parentesi. Definiamo un *prodotto competente* sugli elementi $a_1, \dots, a_n$ (nell'ordine dato) ricorsivamente nel modo seguente. Se $n = 1$, l'unico prodotto competente è $P(a_1) = a_1$. Se $P(b_1, \dots, b_s)$ e $Q(c_i, \dots c_t)$ sono prodotti competenti, allora $P(b_1, \dots, b_s) \cdot Q(c_i, \dots c_t)$ è un prodotto competente su $b_1, \dots, b_s, c_i, \dots c_t$. Ad esempio, tutti i prodotti competenti su a_1, a_2, a_3, a_4 sono

$$((a_1a_2)a_3)a_4, (a_1a_2)(a_3a_4), a_1((a_2a_3)a_4), (a_1(a_2a_3))a_4, a_1(a_2(a_3a_4)).$$

Ora si tratta di mostrare, procedendo per induzione su n, che tutti i prodotti competenti su $a_1 a_2 \cdots a_n$ sono eguali a $((\cdots(a_1a_2)a_3)\cdots)a_n$, cioè al prodotto in cui si aprono tutte le parentesi all'inizio.

È utile guardare la pagina della Wikipedia sui Catalan numbers, che fra le altre cose contano proprio tutti questi prodotti competenti.)

Esercizio 1.3. Sia G un gruppo, $H \subseteq G$.

(1) Si dica quando H è un sottogruppo di G.
(2) Si mostri che sono equivalenti:
  (a) H è un sottogruppo di G, e
  (b) (i) $H \neq \emptyset$, e
    (ii) per ogni $x, y \in H$, allora $xy^{-1} \in H$.

Esercizio 1.4. Sia G un gruppo, e H un sottoinsieme non vuoto di G.

- Si mostri che se G è *finito*, e per ogni $x, y \in H$ si ha $xy \in H$, allora H è un sottogruppo di G.
  (Suggerimento: Sia $a \in H$. Dato che H è finito, il periodo di a è finito, dunque esiste $n > 0$ tale che $a^n = 1$. Dunque $a^{-1} = a^{n-1}$, con $n - 1 \geq 0$.)
- Si trovino un gruppo G *infinito*, e un suo sottoinsieme H non vuoto, tale che per ogni $x, y \in H$ si ha $xy \in H$, ma H non è un sottogruppo di G.
  (Suggerimento: Prendete $G = \mathbf{Z}$ e $H = \mathbf{N}$.)

Esercizio 1.5 (Non ve lo chiedo in esami/provette, ma useremo questi fatti ripetutamente). Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme. Sia M l'insieme delle funzioni su Ω. Si consideri l'operazione di composizione da sinistra a destra su M, dunque per $f, g \in M$ e $x \in \Omega$ si pone

$$x(f \circ g) = (xf)g.$$

(1) Si mostri che $\circ$ è associativa.
(2) Si mostri che la funzione identica (o identità) $\mathbf{1}$ definita da

$$x\mathbf{1} = x, \quad \text{per } x \in \Omega$$

è un elemento neutro per $\circ$.
(3) Si mostri che $f \in M$ ha un'inversa destra se e solo se è iniettiva.
(4) Si mostri che $f \in M$ ha un'inversa sinistra se e solo se è suriettiva.
(5) Si mostri che $f \in M$ è invertibile se e solo se è biiettiva.

Esercizio 1.6. Sia G un gruppo, $H \leq G$. Si consideri la relazione su G data, per $a, b \in G$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad ab^{-1} \in H.$$

(1) Si mostri che G è una relazione di equivalenza su G.
(2) Si mostri che la classe dell'elemento $a \in G$ è la *classe laterale destra* $Ha = \{ ha : h \in H \}$. (Si veda l'Esercizio 1.11.)
(3) Se ne deduca che l'insieme $\{ Ha : a \in G \}$ è una partizione di G.
(4) Si mostri che per ogni $a, b \in G$ esiste una biezione $Ha \to Hb$, sicché Ha e Hb hanno lo stesso numero di elementi.
(5) Se G è finito, se ne deduca il Teorema di Lagrange:

Teorema. Se G è un gruppo finito, e $H \leq G$, allora

$$|\, G \,| = |\, H \,| \cdot |\, G : H \,|,$$

*ove $|\, G : H \,|$ è l'*indice di H in G, *ovvero il numero di classi laterali destre di H in G. In particolare $|\, H \,|$ divide $|\, G \,|$.*

Esercizio 1.7. Sia G un gruppo finito, $H \leq K \leq G$.
Si mostri, usando il Teorema di Lagrange, che

$$|\, G : H \,| = |\, G : K \,| \cdot |\, K : H \,|.$$

Esercizio 1.8. Sia G un gruppo arbitrario, $H \leq K \leq G$.

(1) Si mostri, che sono equivalenti i seguenti fatti
    (a) $|\, G : H \,|$ è finito, e
    (b) sono finiti $|\, G : K \,|$ e $|\, K : H \,|$,
(2) Si mostri che se valgono le condizioni del punto precedente, allora

$$|\, G : H \,| = |\, G : K \,| \cdot |\, K : H \,|.$$

(Suggerimento: Può forse valere la pena mostrare per prima cosa, sotto la sola ipotesi che $H \leq K \leq G$, che c'è una corrispondenza biunivoca fra le classi laterali (diciamo sinistre) di H in G, e le coppie formate da una classe di K in G e una classe di H in K.

Per far questo può tornare utile forse il concetto (la cui esistenza dipende dall'assioma della scelta) del cosiddetto *insieme completo di rappresentanti per le classe laterali (sinistre) di un sottogruppo J del gruppo G.* Questo è un sottoinsieme $\mathfrak{R}$ di G che contiene uno e un solo elemento di ogni classe laterale di J in G. Dunque ogni elemento di G si scrive in modo unico come rj, per $r \in \mathfrak{R}$ e $j \in J$.)

Esercizio 1.9. Si riformuli l'Esercizio 1.6 a partire dalla relazione

$$aSb \quad \text{se e solo se} \quad a^{-1}b \in H.$$

Ìn particolare

(1) Si mostri che S è una relazione di equivalenza, e che la classe di $a \in G$ è la *classe laterale sinistra* aH.
(2) Si mostri che se G è finito, il numero di classi laterali sinistre è eguale al numero di classi laterali destre.
(3) Più in generale, se G è un gruppo qualsiasi, si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \sigma :\ & \{\, Ha : a \in G \,\} \to \{\, aH : a \in G \,\} \\ & Ha \mapsto a^{-1}H \end{aligned}$$

è ben definita, ed è una biiezione fra l'insieme delle classi laterali destre e quello delle classi laterali sinistre.

Esercizio 1.10 (Facoltativo, più che altro una curiosità). Sia G un gruppo, $H \subseteq G$.

Si consideri la relazione su G data, per $a, b \in G$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad ab^{-1} \in H.$$

Si mostri che se R è una relazione di equivalenza, allora $H \leq G$.

Esercizio 1.11. Sia G un gruppo, e $\mathcal{P}$ l'insieme dei sottoinsiemi di G.

Per ogni $g \in G$, consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} r_g : \mathcal{P} &\to \mathcal{P} & \qquad l_g : \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ A &\mapsto Ag & A &\mapsto gA \end{aligned}$$

ove $Ag = \{\, ag : a \in A \,\}$, e similmente per gA.

Mostrate che r_g, l_g rispettano le inclusioni (cioè se $A \subseteq B$ allora $Ag \subseteq Bg$ e $gA \subseteq gB$), e che sono funzioni invertibili, con $r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$ e $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$.