DIARIO DEL CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI

A.A. 2019/20

DOCENTE: ANDREA CARANTI

Nota. La descrizione di lezioni non ancora svolte si deve intendere come una previsione/pianificazione.

Lezione 1. mercoledí 18 settembre 2019 (2 ore)

Definizione di gruppo. Unicità di elemento neutro e inverso.

Definizioni alternative: è sufficiente richiedere che vi sia un'operazione associativa, un elemento neutro destro, e per ogni elemento un inverso destro.

Gruppi a partire da monoidi.

Il gruppo delle funzioni invertibili su un insieme: permutazioni

Classi laterali destre e sinistre. Teorema di Lagrange.

Lezione 2. martedí 24 settembre 2019 (1 ora)

Sottogruppi normali. Gruppo quoziente.

(Per un altr'anno: fare qui il coniugio nei gruppi simmetrici.)

Primo teorema di isomorfismo.

Secondo teorema di isomorfismo; in particolare, se $H \le G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G.

Conseguenza: se G è in gruppo finito, $H \le G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G, e vale

$$|HN| = \frac{|H|\,|N|}{|H \cap N|}.$$

Lezione 3. mercoledí 25 settembre 2019 (2 ore)

Se G è un gruppo arbitrario, e $H, K \le G$, allora HK è unione di classi laterali sinistre di K, e si ha

$$|HK : K| = |H : H \cap K|\,.$$

Se $H, K \le G$, allora HK è un sottogruppo di G se e solo se $KH \subseteq HK$ se e solo se $KH = HK$.

Un esempio di $H, K \le G$, entrambi non normali, tali che $HK \le G$.

Immagini dirette e inverse. Se $f : A \to B$ è una funzione, e $M \subseteq B$, allora

$$f(f^{-1}(M)) = M \cap f(A),$$

e dunque se $L \subseteq A$, allora

$$f(f^{-1}(f(L))) = f(L).$$

Trento, A. A. 2019/20.

Lezione 4. martedí 1 ottobre 2019 (1 ora)

In particolare, se G è un gruppo, $N \trianglelefteq G$, $\pi : G \to G/N$ è il morfismo canonico, e $H \leq G$, allora

$$\pi^{-1}(\pi(H)) = HN,$$

e si ha

$$\pi(H) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(HN) = \frac{HN}{N}.$$

Dunque se $H, K \leq G$, e $\pi(H) = \pi(K)$, si ha $HN = \pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}(\pi(K)) = KN$. In particolare, se $N \leq H, K$, allora $H = K$.

Terzo teorema di isomorfismo (teorema di corrispondenza).

Sottogruppo $\langle S \rangle$ generato da un sottoinsieme $S \subseteq G$.

Lezione 5. mercoledí 2 ottobre 2019 (2 ore)

Se $f : G \to H$ è un morfismo, allora $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$. Descrizione di $\langle S \rangle$: il caso abeliano e il caso in cui $S = \{ a \}$: gruppi ciclici.

Applicazione: gruppi ciclici, e loro sottogruppi. Lemma sull'ordine della potenza di un elemento.

Coniugio in S_n. Se $a_1, \dots, a_k \leq n$ sono distinti, e $\sigma \in S_n$, allora

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)^\sigma = \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, \dots, a_k) \circ \sigma = (a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_k\sigma).$$

Applicazione all'esempio di prodotto di sottogruppi.

Lezione 6. martedí 8 ottobre 2019 (1 ora)

Prodotti diretti interni ed esterni.

Lezione 7. mercoledí 9 ottobre 2019 (2 ore)

Isomorfismo fra prodotto diretto interno ed esterno.

Prodotti diretti: l'esempio di un gruppo ciclico di ordine 6.

Prodotto diretto di più sottogruppi: caratterizzazione.

Associatività e commutatività del prodotto diretto.

Formula per l'ordine della potenza di un elemento.

Un elemento di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$, si scrive come prodotto di un elemento di ordine a e di un elemento di ordine b.

p-gruppi finiti. Caratterizzazione in termini degli ordini degli elementi: lemma di Cauchy (per ora dimostrazione solo nel caso abeliano).

Lemma: scrivere un elemento come prodotto di p-elementi, per vari primi p.

Un gruppo abeliano finito è prodotto diretto di p-gruppi. Ordine degli stessi.

Un p-gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici: Lemma sull'elemento di ordine massimo (inizio, sono arrivato solo a prendere $x \in P \setminus A = \langle a \rangle$ con periodo di xA eguale a p^k, e dovrò commentare sull'ultimo esercizio del foglio 4).

Lezione 8. martedí 15 ottobre 2019 (1 ora)

Lemma sull'elemento di ordine massimo (quasi fino alla fine).

Lezione 9. mercoledí 16 ottobre 2019 (2 ore)

Ultimo passo: $A \cap B = \{ 1 \}$.

Conseguenza: un p-gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici. Commutatività ed associatività del prodotto diretto.

Un brevissimo cenno all'unicità: partizioni e partizioni duali.

Solo un brevissimo cenno ai gruppi abeliani finitamente generati come prodotti di gruppi ciclici, e al fatto che la stessa teoria spiega le forme canoniche delle matrici.

Prodotto semidiretto interno ed esterno: l'associatività.

Monoide degli endomorfismi su un gruppo, gruppo degli automorfismi di un gruppo.

Lezione 10. martedí 22 ottobre 2019 (1 ora)

Notazione $H \ltimes_{\psi} K$. Elemento neutro e inverso in un prodotto semidiretto esterno. Come ritrovare H e K in $H \ltimes K$.

Endomorfismi di un gruppo ciclico. $f_t(a^i) = a^{ti}$ è un automorfismo di un gruppo ciclico $\langle a \rangle$ di ordine n se e solo se $\gcd(t, n) = 1$. Gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico. Il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico di ordine n ha ordine $\varphi(n)$. Applicazioni: se $\gcd(m, \varphi(n)) = 1$, l'unico prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine n per un gruppo di ordine m è quello diretto.

Lezione 11. mercoledí 23 ottobre 2019 (2 ore)

Quando un prodotto semidiretto è diretto.

Struttura del gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico.

Morfismi a partire da un gruppo ciclico. Prodotti semidiretti di un gruppo ciclico per un gruppo ciclico.

Il gruppo diedrale. (Inizio.)

Sono arrivato a costruire il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico $K = \langle b \rangle$ di ordine n per un gruppo ciclico $H = \langle a \rangle$ di ordine 2 ponendo $\psi(a) = c \in \operatorname{Aut}(K)$, ove $c : x \mapsto x^{-1}$. Ho visto come si calcola, e ho scritto la notazione compatta

$$\left\langle a, b : b^n = 1, a^2 = 1, b^a = b^{-1} \right\rangle.$$

Lezione 12. martedí 29 ottobre 2019 (1 ora)

Nella notazione compatta c'è tutto quello che devo sapere, che K è ciclico di ordine n, che H è ciclico di ordine 2, e ψ è descritto attraverso la descrizione di $\psi(a) \in \operatorname{Aut}(K)$.

Nel gruppo diedrale, tutti gli elementi fuori da $\langle b \rangle$ hanno ordine 2. Dunque in un gruppo il prodotto di due elementi di ordine 2 può avere ordine arbitario.

Un altro esempio:

$$\left\langle a, b : b^7 = 1, a^3 = 1, b^a = b^2 \right\rangle.$$

Somma puntuale di due funzioni su un gruppo. La somma di due endomorfismi di un gruppo G non è in generale un endomorfismo $(1 + 1 = 2)$, ma lo è se G è abeliano.

Lezione 13. mercoledí 30 ottobre 2019 (2 ore)

Se G è un gruppo abeliano, $\mathrm{End}(G)$ diventa un anello con unità rispetto a somma e composizione.

Strutture di F-spazio vettoriale su un gruppo $(V, +, 0)$ come morfismi di anelli con unità $F \to \mathrm{End}(V)$. Gruppi elementari abeliani: un gruppo elementare abeliano di ordine p^n è prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine p, e il suo gruppo di automorfismi è isomorfo al gruppo $\mathrm{GL}(n, p)$ delle matrici invertibili $n \times n$ sul campo con p elementi.

Un esempio: Se $V = \langle\, a \,\rangle \times \langle\, b \,\rangle$, con $|a| = |b| = p$ primo, allora

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

è un automorfismo di ordine 3, dato che è radice del suo polinomio caratteristico $x^2 + x + 1$, e dunque

$$T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1) = 0;$$

T dà origine al gruppo

$$\left\langle a, b, t : a^p = b^p = [a, b] = 1, a^t = b, b^t = ab \right\rangle$$

di ordine $3p^2$.

Nel caso particolare $p = 2$, si ottiene il gruppo alterno A_4 di ordine 12, dato che se

$$\begin{cases} a = (12)(34), \\ b = (13)(42), \\ c = (14)(23) = ab, \\ t = (234), \end{cases}$$

si ha $a^t = b$, $b^t = c = ab$.

Permutazioni pari e dispari.

Lezione 14. martedí 5 novembre 2019 (1 ora)

Il gruppo alterno A_n, formato dalle permutazioni pari, è un sottogruppo normale di indice 2 in S_n, per $n \geq 2$.

Cayley-Hamilton. Sia T una matrice, p il suo polinomio caratteristico, che su un campo algebricamente chiuso si scrive $p = p_1 \dots p_n$, con $p_i = x - a_i$, dove $a_1, \dots, a_n$ sono gli autovalori di T. Allora $p(T) = p_1(T) \dots p_n(T)$, con i $p_i(T)$ che commutano fra loro, dato che sono (espressioni) polinomi(ali) in T, e le potenze di T commutano fra loro. Scegliamo una base $v_1, \dots, v_n$ in modo che T si scriva

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ b_{21} & a_2 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{i,i-1} & a_i & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & & & & b_{n,n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Lezione 15. mercoledí 6 novembre 2019 (2 ore)

Si ponga
$$V_i = \langle\, v_1, \dots, v_i \,\rangle\,.$$
Allora si ha $V_i T \subseteq V_i$, e $V_i p_i(T) \subseteq V_{i-1}$. Dunque, posto che $V_1 p_1(T) = \{\, 0 \,\}$, e procedendo per induzione su i, si ha per ogni i
$$V_i p_i(T) p_{i-1}(T) \dots p_1(T) \subseteq V_{i-1} p_{i-1}(T) \dots p_1(T) = \{\, 0 \,\}\,,$$
e quindi $p(T) = 0$.

Azione di un gruppo su un insieme. Due definizioni equivalenti, un po' come per gli spazi vettoriali. Gruppi di permutazioni e azioni.

Esempio ricorrente: D_4 che agisce su $\Omega = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$ e l'azione sulle diagonali.

Azioni destre e sinistre, e come passare da una all'altra.

Orbite come classi di una relazone di equivalenza. Azioni (e sottogruppi) transitive. Stabilizzatori. Stabilizzatori degli elementi di un'orbita. Nucleo di una azione.

Azione di un gruppo su se stesso per moltiplicazione: rappresentazione regolare destra e sinistra. Azioni (e sottogruppi) regolari: Teorema di Cayley.

Lezione 16. venerdí 8 novembre 2019 (3 ore)

Prova intermedia.

Lezione 17. martedí 12 novembre 2019 (1 ora)

Teorema orbita/stabilizzatore.

Azioni su n-ple (su funzioni)

Se il gruppo è abeliano, azioni destre e sinistre sono la stessa cosa.

Lemma di Cauchy, mediante l'azione di $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ su
$$\left\{\, (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in G^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} : a_0 a_1 \cdots a_{p-1} = 1 \,\right\},$$
ove $G^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$ è la notazione per l'insieme delle funzioni $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to G$, scritte come elenco dei valori. (Inizio)

Lezione 18. mercoledí 13 novembre 2019 (2 ore)

Azione per coniugio di un gruppo su se stesso, o su un sottogruppo normale: classi di coniugio, centralizzanti.

Classi di coniugio di S_4.

Il gruppo finito G agisca sull'insieme Ω. Sia $H \le G$ con $|G : H| = 2$ (e dunque $H \trianglelefteq G$) e $\alpha \in \Omega$. Si ha
$$\left|\alpha^H\right| = \begin{cases} \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \not\le H \\ \frac{1}{2} \cdot \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \le H \end{cases}$$

Classi di coniugio di A_4.

Lezione 19. martedí 19 novembre 2019 (1 ora)

Classi di coniugio di S_5.

Classi di coniugio e semplicità di A_5.

Azione sulle classi laterali.

Un sottogruppo di indice il più piccolo primo che divida l'ordine del gruppo è normale. (Generalizza il caso di indice 2.)

Lezione 20. mercoledí 20 novembre 2019 (2 ore)

Azione sulle classi laterali: se il gruppo G ha un sottogruppo di indice n, allora G ha un sottogruppo normale di indice un multiplo di n e un divisore di $n!$

Lemma. Sia G un gruppo. Se $|G| = ab$, con $\gcd(a, b) = 1$, e G ha un sottogruppo normale A di ordine a, allora A contiene tutti i sottogruppi di G di ordine un divisore di a.

A_4 ha ordine 12, ma non ha un sottogruppo di ordine 6, nonostante 6 divida 12.

Azione per moltiplicazione sui sottoinsiemi.

Primo Teorema di Sylow.

Teoremi di Lucas e di Kummer (quest'ultimo senza dimostrazione).

Lezione 21. martedí 26 novembre 2019 (1 ora)

Dimostrazione del Teorema di Lucas.

Azione di un gruppo per coniugio sui suoi sottogruppi.

Secondo Teorema di Sylow.

Lezione 22. mercoledí 27 novembre 2019 (2 ore)

Un p-sottogruppo di Sylow è normale se e solo se è unico.

Terzo Teorema di Sylow.

Un gruppo di ordine 15 è ciclico.

Sia G un gruppo, p un primo che divide l'ordine del gruppo. Se G ha k sottogruppi di ordine p, e questi hanno a due a due intersezione banale, allora il numero di elementi di ordine p di G è $k(p - 1)$.

Un gruppo di ordine pq, ove $p > q$ sono primi, è ciclico se $q \nmid p-1$. Se $q \mid p-1$, c'è un gruppo non abeliano di ordine pq (che poi sarebbe unico a meno di isomorfismi).

Un esempio: un gruppo non abeliano di ordine 21.

Un gruppo di ordine 30 ha un sottogruppo (ciclico e normale) di ordine 15. In un gruppo di ordine 30 si ha $n_3 = 1 = n_5$.

Lezione 23. martedí 3 dicembre 2019 (1 ora)

Equazione delle classi.

Il centro di un p-gruppo finito non banale è non banale.

Un gruppo di ordine il quadrato di un primo è abeliano.

Se p, q sono primi distinti, un gruppo di ordine p^2q ha un sottogruppo di Sylow normale.

Lezione 24. mercoledí 4 dicembre 2019 (2 ore)

Un p-gruppo finito ha sottogruppi normali per ogni divisore dell'ordine.
Argomento di Frattini.
Morfismi di azioni: similitudini.
Di nuovo orbita/stabilizzatore, come similitudine di azioni.
I gruppi di ordine < 60 sono abeliani o non semplici. (Inizio, fino ad ordine 20.)

Lezione 25. martedí 10 dicembre 2019 (1 ora)

Ricordare il caso $p^2 q$,
I gruppi di ordine < 60 sono abeliani o non semplici (fine).
Un gruppo semplice di ordine 60 è isomorfo a A_5. (Fino a metà della dimostrazione che $n_2 = 1$.)

Lezione 26. mercoledí 11 dicembre 2019 (2 ore)

Un gruppo semplice di ordine 60 è isomorfo a A_5. (Conclusione.)
Gli spazi vettoriali sono liberi.
Gruppi liberi. Presentazione di gruppi mediante generatori e relazioni: il caso dei gruppi ciclici; il caso di S_3. (Inizio: sono arrivato ad aver scritto la presentazione, resta da vedere che il gruppo presentato ha proprio ordine 6.)

Lezione 27. martedí 17 dicembre 2019 (1 ora)

Gruppi liberi: unicità a meno di isomorfismo, e generazione.
Presentazione di gruppi mediante generatori e relazioni: il caso di S_3. (Inizio.)

Lezione 28. mercoledí 18 dicembre 2019 (2 ore)

Presentazione di gruppi mediante generatori e relazioni: il caso di S_3. (Fine.)
Esistenza dei gruppi liberi.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Trento
Email address: `andrea.caranti@unitn.it`
URL: `http://www.science.unitn.it/~caranti/`