DIARIO DEL CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI

A.A. 2020/21

DOCENTE: ANDREA CARANTI

Nota. La descrizione di lezioni non ancora svolte si deve intendere come una previsione/pianificazione.

Lezione 1. martedí 22 settembre 2020 (2 ore)

Definizione di gruppo. Unicità di elemento neutro e inverso.

Definizioni alternative: è sufficiente richiedere che vi sia un'operazione associativa, un elemento neutro destro, e per ogni elemento un inverso destro.

Gruppi a partire da monoidi.

Il gruppo delle funzioni invertibili su un insieme: permutazioni

Sottogruppi: definizione equivalente.

Classi laterali destre e sinistre.

Lezione 2. giovedí 24 settembre 2020 (1 ora)

Teorema di Lagrange. L'eguaglianza

$$|G : K| = |G : H| \cdot |H : K|$$

nel caso generale, se G è un gruppo, e $H \le K \le G$.

Lezione 3. martedí 29 settembre 2020 (2 ore)

Sottogruppi normali. Gruppo quoziente.

Coniugio. Coniugio nei gruppi simmetrici: le classi di coniugio di S_n corrispondono alle partizioni di n.

Primo teorema di isomorfismo.

Secondo teorema di isomorfismo; in particolare, se $H \le G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G.

Lezione 4. giovedí 1 ottobre 2020 (1 ora)

Conseguenza: se G è in gruppo finito, $H \le G$ e $N \trianglelefteq G$, allora HN è un sottogruppo di G, e vale

$$|HN| = \frac{|H|\,|N|}{|H \cap N|}.$$

Se G è un gruppo arbitrario, e $H, K \le G$, allora HK è unione di classi laterali sinistre di K, e si ha

$$|HK : K| = |H : H \cap K|\,.$$

Trento, A. A. 2020/21.

Se $H, K \leq G$, allora HK è un sottogruppo di G se e solo se $KH \subseteq HK$ se e solo se $KH = HK$.

Un esempio di $H, K \leq G$, entrambi non normali, tali che $HK \leq G$.

Immagini dirette e inverse. Sia $f : A \to B$ una funzione.

(1) Se $M \subseteq B$, allora
$$f(f^{-1}(M)) = M \cap f(A).$$
(2) Se $L \subseteq A$, allora $f^{-1}(f(L)) = \cup \{ [a] : a \in L \}$, ove $[a] = \{ x \in A : f(x) = f(a) \}$ è la classe di equivalenza della relazione su A data da xRy se e solo se $f(x) = f(y)$.

Lezione 5. martedí 6 ottobre 2020 (2 ore)

Se $L \subseteq A$, allora
$$f(f^{-1}(f(L))) = f(L).$$
In particolare, se G è un gruppo, $N \trianglelefteq G$, $\pi : G \to G/N$ è il morfismo canonico, e $H \leq G$, allora
$$\pi^{-1}(\pi(H)) = HN,$$
e si ha
$$\pi(H) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(HN) = \frac{HN}{N}.$$
Dunque se $H, K \leq G$, e $\pi(H) = \pi(K)$, si ha $HN = \pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}(\pi(K)) = KN$. In particolare, se $N \leq H, K$, allora $H = K$.

Terzo teorema di isomorfismo (teorema di corrispondenza).

Sottogruppo $\langle S \rangle$ generato da un sottoinsieme $S \subseteq G$.

Se $f : G \to H$ è un morfismo, allora $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$. Descrizione di $\langle S \rangle$: il caso abeliano e il caso in cui $S = \{ a \}$: gruppi ciclici.

Un'applicazione del terzo teorema di isomorfismo: gruppi ciclici...

Lezione 6. giovedí 8 ottobre 2020 (1 ora)

...e loro sottogruppi.Un gruppo ciclico di ordine n ha uno e un solo sottogruppo di ordine d,per ogni divisore d di n.

Lemma sull'ordine della potenza di un elemento, e nuova dimostrazione.

Prodotti diretti esterni: inizio

Lezione 7. martedí 13 ottobre 2020 (2 ore)

Isomorfismo fra prodotto diretto interno ed esterno.

Prodotto diretto di più sottogruppi: caratterizzazione.

Associatività e commutatività del prodotto diretto.

Un elemento di ordine ab, con $\gcd(a, b) = 1$, si scrive come prodotto di un elemento di ordine a e di un elemento di ordine b, entrambi sue potenze.

Lemma: scrivere un elemento come prodotto di p-elementi, per vari primi p.

Un gruppo abeliano finito è prodotto diretto di p-gruppi. Ordine degli stessi.

Lezione 8. giovedí 15 ottobre 2020 (1 ora)

p-gruppi finiti. Caratterizzazione in termini degli ordini degli elementi: lemma di Cauchy (per ora dimostrazione solo nel caso abeliano).

Un p-gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici: inizio del Lemma sull'elemento di ordine massimo.

Lezione 9. martedí 20 ottobre 2020 (2 ore)

Un p-gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici: conclusione del Lemma sull'elemento di ordine massimo.

Conseguenza: un p-gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici.

Un brevissimo cenno all'unicità: partizioni e partizioni duali.

Solo un brevissimo cenno ai gruppi abeliani finitamente generati come prodotti di gruppi ciclici, e al fatto che la stessa teoria spiega le forme canoniche delle matrici.

Prodotto semidiretto interno ed esterno: l'associatività.

Lezione 10. mercoledí 21 ottobre 2020 (1 ora)

Notazione $H \ltimes_\psi K$. Elemento neutro e inverso in un prodotto semidiretto esterno. Come ritrovare H e K in $H \ltimes K$.

Endomorfismi di un gruppo ciclico. $f_t(a^i) = a^{ti}$ è un automorfismo di un gruppo ciclico $\langle\, a \,\rangle$ di ordine n se e solo se $\gcd(t, n) = 1$. Gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico. Il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico di ordine n ha ordine $\varphi(n)$. Applicazioni: se $\gcd(m, \varphi(n)) = 1$, l'unico prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine n per un gruppo di ordine m è quello diretto.

Monoide degli endomorfismi su un gruppo, gruppo degli automorfismi di un gruppo.

Lezione 11. martedí 27 ottobre 2020 (2 ore)

Il gruppo diedrale come prodotto semidiretto esterno ed interno. Ho costruito il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico $K = \langle\, b \,\rangle$ di ordine n per un gruppo ciclico $H = \langle\, a \,\rangle$ di ordine 2 ponendo $\psi(a) = c \in \operatorname{Aut}(K)$, ove $c : x \mapsto x^{-1}$. Ho visto come si calcola, e ho scritto la notazione compatta

$$\left\langle\, a, b : b^n = 1, a^2 = 1, b^a = b^{-1} \,\right\rangle.$$

Nella notazione compatta c'è tutto quello che devo sapere, che K è ciclico di ordine n, che H è ciclico di ordine 2, e ψ è descritto attraverso la descrizione di $\psi(a) \in \operatorname{Aut}(K)$.

Struttura del gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico.

Morfismi a partire da un gruppo ciclico. Prodotti semidiretti di un gruppo ciclico per un gruppo ciclico.

Un altro esempio:

$$\left\langle\, a, b : b^7 = 1, a^3 = 1, b^a = b^2 \,\right\rangle.$$

Somma puntuale di due funzioni su un gruppo. La somma di due endomorfismi di un gruppo G non è in generale un endomorfismo ($1 + 1 = 2$), ma lo è se G è abeliano.

Se G è un gruppo abeliano, $\mathrm{End}(G)$ diventa un anello con unità rispetto a somma e composizione.

Strutture di F-spazio vettoriale su un gruppo $(V, +, 0)$ come morfismi di anelli con unità $F \to \mathrm{End}(V)$.

Gruppi elementari abeliani: un gruppo elementare abeliano di ordine p^n è prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine p, e il suo gruppo di automorfismi è isomorfo al gruppo $\mathrm{GL}(n, p)$ delle matrici invertibili $n \times n$ sul campo con p elementi.

Un esempio: Se $V = \langle\, a \,\rangle \times \langle\, b \,\rangle$, con $|a| = |b| = p$ primo, allora

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

è un automorfismo di ordine 3, dato che è radice del suo polinomio caratteristico $x^2 + x + 1$, e dunque

$$T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1) = 0;$$

T dà origine al gruppo

$$\left\langle\, a, b, t : a^p = b^p = [a, b] = 1, a^t = b, b^t = a^{-1}b^{-1} \,\right\rangle$$

di ordine $3p^2$.

Gruppi liberi: definizione.

Lezione 12. martedí 3 novembre 2020 (2 ore)

Basi di un gruppo e gruppi liberi. Unicità dei gruppi liberi a meno di isomorfismi. IL gruppo libero sull'insieme X è generato da X.

Presentazioni.

Azione di un gruppo su un insieme. Due definizioni equivalenti.

Azioni destre e sinistre, e come passare da una all'altra.

Lezione 13. mercoledí 4 novembre 2020 (1 ora)

Gruppi di permutazioni e azioni.

Esempio ricorrente: D_4 che agisce su $\Omega = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$ e l'azione sulle diagonali.

Orbite come classi di una relazione di equivalenza. Azioni (e sottogruppi) transitive. Stabilizzatori. Gli stabilizzatori degli elementi di un'orbita sono coniugati.

Teorema Orbita/Stabilizzatore.

Lezione 14. martedí 10 novembre 2020 (2 ore)

Se G agisce su un insieme Ω, allora agisce su ogni orbita α^G, per $\alpha \in \Omega$, e sull'insieme delle parti $\mathcal{P}(\Omega)$.

Azione di D_4 sulle diagonali del quadrato. Nucleo di un'azione. Azioni fedeli, Azioni transitive.

Rappresentazioni regolari destra e sinistra. Azioni regolari.

Restrizione di un'azione a un sottogruppo. Azione di un sottogruppo per moltiplicazione a destra/a sinistra. Le orbite sono le classi laterali.

Azione di un gruppo per moltiplicazione a destra sull'insieme delle classi laterali destre di un sottogruppo. isomorfismo di azioni, e nuova versione del teorema orbita/stabilizzatore in termini di isomorfismi di azioni. Teorema di Cayley.

Se Ω, Δ sono insiemi, e il gruppo G agisce su Ω, allora G agisce sull'insieme Δ^Ω delle funzioni da Ω a Δ mediante $f^g(x) = f(x^{g^{-1}})$. Azione sulle n-ple.

Lezione 15. mercoledí 11 novembre 2020 (1 ora)

Lemma di Cauchy.

Azione per coniugio di un gruppo su se stesso, o su un sottogruppo normale: classi di coniugio, centralizzanti.

Lezione 16. martedí 17 novembre 2020 (2 ore)

Permutazioni pari e dispari.

Il gruppo alterno A_n, formato dalle permutazioni pari, è un sottogruppo normale di indice 2 in S_n, per $n \geq 2$.

Classi di coniugio di S_4.

Il gruppo finito G agisca sull'insieme Ω. Sia $H \trianglelefteq G$. Sia $x \in \Omega$. Allora $\left|x^H\right|$ divide $\left|x^G\right|$, e si ha

$$\left|\alpha^H\right| = \frac{1}{|G : HG_x|} \left|\alpha^G\right|$$

Il gruppo finito G agisca sull'insieme Ω. Sia $H \leq G$ con $|G : H| = 2$ (e dunque $H \trianglelefteq G$) e $\alpha \in \Omega$. Si ha

$$\left|\alpha^H\right| = \begin{cases} \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \nleq H \\ \frac{1}{2} \cdot \left|\alpha^G\right| & \text{se } G_\alpha \leq H \end{cases}$$

Classi di coniugio di A_4.

Classi di coniugio di S_5.

Lezione 17. mercoledí 18 novembre 2020 (1 ora)

Classi di coniugio e semplicità di A_5.

Un sottogruppo di indice il più piccolo primo che divida l'ordine del gruppo è normale. (Generalizza il caso di indice 2.)

Azione sulle classi laterali: se il gruppo G ha un sottogruppo di indice n, allora G ha un sottogruppo normale di indice un multiplo di n e un divisore di $n!$

Lemma. Sia G un gruppo. Se $|G| = ab$, con $\gcd(a, b) = 1$, e G ha un sottogruppo normale A di ordine a, allora A contiene tutti i sottogruppi di G di ordine un divisore di a.

A_4 ha ordine 12, ma non ha un sottogruppo di ordine 6, nonostante 6 divida 12.

Lezione 18. martedí 24 novembre 2020 (2 ore)

Primo Teorema di Sylow.

Equazione delle classi.

Il centro di un p-gruppo finito non banale è non banale. Conseguenza: se p è un primo, e G è un gruppo finito di ordine $p^e m$, con $e \geq 1$ e $p \nmid m$, allora G ha sottogruppi di ordine p^f per ogni $0 \leq f \leq e$.

Teoremi di Lucas e di Kummer.

Lezione 19. mercoledí 25 novembre 2020 (1 ora)

Conclusione della dimostrazione del Teorema di Kummer.

Se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano. Un gruppo di ordine p^2, con p un primo, è abeliano.

Azione di un gruppo per coniugio sui suoi sottogruppi.

Secondo Teorema di Sylow: primo punto.

Lezione 20. martedí 1 dicembre 2020 (2 ore)

Un p-sottogruppo di Sylow è normale se e solo se è unico.

Secondo Teorema di Sylow: secondo e terzo punto.

Terzo teorema di Sylow.

Gruppi di ordine pq, con p, q primi distinti.

In un gruppo di ordine p^2q,con p, q primi distinti, si ha che $n_p = 1$, oppure $n_q = 1$.

Lezione 21. mercoledí 2 dicembre 2020 (1 ora)

Argomento di Frattini: gruppi nilpotenti.

I gruppi di ordine minore di 60 non sono semplici non abeliani: i casi da 1 a 24.

Lezione 22. mercoledí 9 dicembre 2020 (1 ora)

I gruppi di ordine minore di 60 non sono semplici non abeliani: i casi da 25 a 59.

Un gruppo semplice di ordine 60 è isomorfo ad A_5.

Lezione 23. martedí 15 dicembre 2020 (2 ore)

Gruppi k-transitivi. Gruppi primitivi. Un gruppo 2-transitivo è primitivo.

Semplicità di A_n, per $n \geq 5$ (inizio).

Lezione 24. mercoledí 16 dicembre 2020 (1 ora)

Semplicità di A_n, per $n \geq 5$ (fine).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Trento

Email address: `andrea.caranti@unitn.it`

URL: `http://www.science.unitn.it/~caranti/`