TRENTO, A.A. 2022/23
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 13

Avvertenza. In rosso e in blu le correzioni rispetto alla prima versione.

Esercizio 13.1. Sia D un UFD, e F il suo campo dei quozienti. Volendo, nel seguito si può assumere $D = \mathbf{Z}$ e $F = \mathbf{Q}$.

Un polinomio non nullo $f \in D[x]$ si dice *primitivo* se il massimo comun divisore dei suoi coefficienti è 1.

(1) Si mostri che ogni $0 \neq f \in D[x]$ si può scrivere nella forma
$$f = cf_1,$$
ove $c \in D$, e f_1 è primitivo.

(2) Si mostri che se $0 \neq c, d \in D$, e $0 \neq f, g \in D[x]$ sono polinomi primitivi, e $cf = dg$, allora c e d sono associati in D, cioè $d = cu$, ove $u \in D$ è una unità.

(Suggerimento: Se $h = cf = dg$, allora c e d sono due massimi comun divisori dei coefficienti di h, dunque...)

(3) Si mostri che ogni polinomio $0 \neq f \in F[x]$ si può scrivere come $f = \alpha f_1$, ove $\alpha \in F$, e $f_1 \in D[x]$ è primitivo.

(4) Si mostri che se $0 \neq f \in F[x]$, e
$$f = \alpha f_1 = \beta f_2$$
con $\alpha, \beta \in F$, e $f_1, f_2 \in D[x]$ primitivi, allora $\beta = \alpha u$, ove u è una unità di D.

(5) Si mostri che se $0 \neq f, g \in D[x]$ sono *primitivi* e associati in $F[x]$ (cioè esiste $\alpha \in F$ tali che $g = \alpha f$), allora sono associati anche in $D[x]$, cioè $\alpha \in D$ è una unità in D

(6) Si mostri che il prodotto di due polinomi primitivi è primitivo. (Questo è noto come *Lemma di Gauss*.)

(7) Si mostri che se $f \in D[x]$ ha grado positivo, ed è irriducibile in $D[x]$, allora è primitivo.
(Suggerimento: Per assurdo, se $f = df_1$, con $d \in D$ che non è un'unità, allora questa è una decomposizione in cui nessuno dei due fattori è una unità, e dunque f non è irriducibile.)

(8) (Facoltativo) Si mostri che se $f \in D[x]$ ha grado positivo, ed è irriducibile in $D[x]$, allora è irriducibile in $F[x]$.
(Suggerimento: Intanto, f è primitivo. Se per assurdo $f = f_1 f_2$, con $f_1, f_2 \in F[x]$, ciascuno di grado positivo, si scriva $f_i = \alpha_i g_i$, con $\alpha_i \in F$, e $f_i \in D[x]$ primitivi. Allora

$$f = \alpha_1 \alpha_2 g_1 g_2 \tag{1}$$

ove, per il Lemma di Gauss, $g_1 g_2$ è primitivo. Allora $\alpha_1 \alpha_2$ è una unità in $D[x]$, e (1) mostra che f è riducibile in $D[x]$, dato che i gradi di g_1, g_2 sono positivi, dato che sono i gradi di f_1, f_2.)

(9) Mostrate che ogni elemento diverso da zero di $D[x]$ si può scrivere come prodotto di irriducibili.

(10) Mostrate che la fattorizzazione del punto precedente è unica a meno di riordinare i termini e di unità.