TRENTO, A.A. 2022/23
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 11

Esercizio 11.1. Sia $(\mathcal{P}, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, e sia $M \in \mathcal{P}$.

(1) Si dica quand'è che
  (a) M è un elemento *massimo* di $(\mathcal{P}, \leq)$;
  (b) M è un elemento *massimale* di $(\mathcal{P}, \leq)$;
(2) Si mostri che un massimo è massimale.
(3) Si mostri che un massimo, se c'è, è unico.
(4) Si dia un esempio di un insieme parzialmente ordinato in cui c'è un elemento massimale che non è massimo.
(5) Si dia esempio di un insieme parzialmente ordinato (non vuoto) che non ha elementi massimali.

Esercizio 11.2. Sia A un anello commutativo con unità, e $a_1, \dots, a_n \in A$.

Si mostri che il più piccolo ideale di A che contenga $a_1, \dots, a_n$ è

$$(a_1, \dots, a_n) = \{ a_1 u_1 + \dots + a_n u_n : u_i \in A \} .$$

Un ideale di questa forma si dice *finitamente generato*.

Esercizio 11.3.

(1) Si definisca il concetto di anello (commutativo) Noetheriano.
(2) Si mostri che per un anello commutativo con unità A sono equivalenti
  (a) A è Noetheriano.
  (b) ogni ideale di A è finitamente generato, e
  (c) ogni insieme non vuoto di ideali di A ha un elemento massimale rispetto all'inclusione.
(3) Si mostri che un PID è Noetheriano.

Esercizio 11.4. Enunciate e dimostrate il teorema della base di Hilbert.

Esercizio 11.5. Mostrate che se A è un dominio, e $p \in A$ non è né zero, né una unità, allora sono equivalenti:

(1) p è primo, e
(2) $A/(p)$ è un dominio.

Esercizio 11.6. Sia A un anello commutativo con unità.

(1) Si mostri che per $a \in A$, sono equivalenti
  (a) a è invertibile,
  (b) $1 \in (a)$, e
  (c) $(a) = A$.
(2) Si mostri che sono equivalenti
  (a) gli unici ideali di A sono A e $\{ 0 \}$, e
  (b) A è un campo
(3) Si riguardi l'Esercizio 3.3(3) per un esempio di un anello con unità B *non commutativo* che non è un campo, ma i cui unici ideali sono B e $\{ 0 \}$.

(4) Sia A un anello commutativo con unità, I un suo ideale. Si mostri che sono equivalenti
   (a) A/I è un campo, e
   (b) I è un ideale massimale.

Esercizio 11.7.

(1) Sia A un PID, $p \in A$ diverso da zero, e non una unità. Si mostri che ono equivalenti
   (a) p è irriducibile,
   (b) (p) è massimale, e
   (c) $A/(p)$ è un campo.

(2) Si mostri che 2 è irreducibile in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, ma $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]/(2)$ non è neanche un dominio.

   (Suggerimento: Si mostri che $1 \pm \sqrt{-5} + (2) \neq 0 + (2)$, ma $(1 + \sqrt{-5} + (2)) \cdot (1 - \sqrt{-5} + (2)) = 0 + (2)$.)

(3) Si mostri che 2 è irriducibile in $\mathbf{Z}[x]$, ma $\mathbf{Z}[x]/(2)$ è un dominio che non è un campo.

(4) Siano A un dominio, e $0 \neq a \in A$. Si mostri che sono equivalenti:
   (a) a è invertibile in A;
   (b) (a, x) è un ideale principale di $A[x]$;
   (c) $(a, x) = A[x]$.

   In particolare, si mostri che se $A[x]$ è un PID, allora A è un campo.