TRENTO, A.A. 2022/23
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 5

Esercizio 5.1. Sia B/F una estensione del campo F.

Si mostri che se B è un dominio (dunque se è un campo ancora meglio), allora il polinomio minimo di α su F è irriducibile in $F[x]$, e $F[\alpha]$ è un campo.

Esercizio 5.2. Sia F un campo, $f \in F[x]$ monico. Si dimostrino i fatti seguenti.

(0) Se f ha grado 1, allora f ha una radice in F.
(1) Se f ha grado 1, allora f è irriducibile in $F[x]$.
(2) Supponiamo che f abbia grado > 1. Se f ha una radice in F, allora f è riducibile in $F[x]$.
(3) Supponiamo che f abbia grado 2 o 3. Se f non ha radici in F, allora f è irriducibile in $F[x]$.
(4) Esistono campi F e polinomi f di grado 4 che non hanno radici in F, ma sono riducibili in $F[x]$.

Esercizio 5.3.

Sia $f = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, con $a_0, a_n \neq 0$.

(1) Sia $r = s/t$ un numero razionale, con $s, t \in \mathbf{Z}$, $\gcd(s,t) = 1$.
Si mostri che se r è una radice di f, allora $t \mid a_n$ e $s \mid a_0$.
(2) Sia $a_n = 1$, dunque f è monico.
Si mostri che se $r \in \mathbf{Q}$ è radice di f, allora $r \in \mathbf{Z}$, e r divide a_0. (Questo si chiama il *teorema della radice razionale*.)

Esercizio 5.4. Si mostri che $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{Q}$.

Esercizio 5.5.

(1) Si mostri che il polinomio minimo di $\sqrt{2}$ su $\mathbf{Q}$ è $x^2 - 2$.
(2) Si mostri che il polinomio minimo di $\sqrt[3]{2}$ su $\mathbf{Q}$ è $x^3 - 2$.

Esercizio 5.6. Si trovi il polinomio minimo su $\mathbf{R}$ di i.

Esercizio 5.7. Siano N/L un'estensione, e $L \subseteq M \subseteq N$, con L, M, N campi.

Sia $\alpha \in N$ algebrico su L.

(1) Si mostri che α è algebrico su M.
(2) Se m_L, m_M denotano i polinomi minimi di α rispettivamente su L, M, si mostri che $m_M \mid m_L$.

(Suggerimento: Per il primo punto, e con la notazione del secondo, si noti che $m_L \in M[x]$. Per il secondo punto, si noti che $m_L \in M[x]$ si annulla su α, e quindi sta in (m_M).)

Esercizio 5.8. Si consideri $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(1) Si mostri che α è radice del polinomio $f = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbf{Q}[x]$.

(2) Si mostri che le radici di f sono i quattro numeri $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$, e che dunque

$$\begin{aligned} f = {} & (x-(+\sqrt{2}+\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(-\sqrt{2}+\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(+\sqrt{2}-\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(-\sqrt{2}-\sqrt{3})). \end{aligned}$$

(3) Si mostri che $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ per ogni scelta dei segni.

(Suggerimento: Il metodo più spiccio è quello di usare il teorema della radice razionale.)

(4) Se ne deduca che se f è *riducibile* in $\mathbf{Q}[x]$, allora deve essere prodotto di due polinomi di grado 2.

(5) Se $f = hk$, con h, k monici di grado 2, e $x - alpha \mid h$, si mostri che ci sono tre possibilità per h, e che in tutti e tre i casi $h \notin \mathbf{Q}[x]$.

Nota. L'esercizio successivo tratta il polinomio minimo di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ su $\mathbf{Q}$ con una leggera variante del primo metodo (quello elementare) fatto a lezione, metodo descritto nell'esercizio precedente.

Esercizio 5.9. Si consideri $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(1) Si mostri che α è radice del polinomio $f = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbf{Q}[x]$.

(2) Si mostri che le radici di f sono i quattro numeri $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$, e che dunque

$$\begin{aligned} f = {} & (x-(+\sqrt{2}+\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(-\sqrt{2}+\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(+\sqrt{2}-\sqrt{3}))\cdot \\ & (x-(-\sqrt{2}-\sqrt{3})). \end{aligned}$$

(3) Si mostri che $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ per ogni scelta dei segni.

(Suggerimento: Il metodo più spiccio è quello di usare il teorema della radice razionale.)

(4) Sia ora m il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}$. Si spieghi perché m divide f.

(5) Si noti che in $\mathbf{R}[x]$ si ha che $x - \alpha$ divide m, dato che α è una radice di m.

(6) Si mostri che $f = m$. Per questo si faccia vedere che l'unico divisore monico $g \in \mathbf{Q}[x]$ di f che sia a sua volta divisibile per $x - \alpha$ è f stesso.

(Suggerimento: Per quel che riguarda l'ultima domanda, occorre distinguere le possibilità per il grado di g. Se grado$(g) = 1$, allora $g = x - \alpha$, e qui si usa uno dei punti precedenti. Se grado$(g) = 2$, allora $g = (x-\alpha)(x-\beta)$, ove β è una delle altre radici di f, dunque ci sono tre casi da considerare. Infine se grado$(g) = 3$, conviene notare che dato che $g \in \mathbf{Q}[x]$, e g divide f, deve essere $f = gh$ per un opportuno $h \in \mathbf{Q}[x]$ (monico) di grado 1, dunque h è un divisore di grado 1 di $f \dots$)

Esercizio 5.10. Si consideri $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{C}$.

(1) Si trovi un polinomio monico $f \in \mathbf{Q}[x]$ di grado 4 di cui α è radice.
(2) Si mostri che $|\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}| \leq 4$.
(3) Si mostri che $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}[\alpha]$.
(4) Si mostri che $F = \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbf{Q}[\alpha]$.
(5) Si mostri che $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}[\alpha]$.
(6) Si mostri che $F[\sqrt{3}] \subseteq \mathbf{Q}[\alpha]$.
(7) Si mostri che $|F[\sqrt{3}] : \mathbf{Q}| = 4$.
(8) Si mostri che $F[\sqrt{3}] = (\mathbf{Q}[\sqrt{2}])[\sqrt{3}] = \mathbf{Q}[\alpha]$.
(9) Si mostri che $|\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}| = 4$.
(10) Si mostri che f è il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}$.

Esercizio 5.11. Si trovi, col metodo dell'Esercizio 5.10, il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di uno dei seguenti elementi

$$\sqrt{2} + \sqrt{5}, \sqrt{3} - \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}.$$