TRENTO, A.A. 2022/23
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 3

Esercizio 3.1.

(1) Mostrate che un sottogruppo di un gruppo che abbia indice 2 è normale.

(2) Trovate un esempio di un gruppo G e di un suo sottogruppo non normale di indice 3.

(SUGGERIMENTO: Cercate in D_3.)

(3) (Facoltativo) Per ogni $n \geq 3$, trovate un esempio di un gruppo G e di un suo sottogruppo non normale di indice n.

(SUGGERIMENTO: Cercate in D_n.)

(4) Sia G un gruppo finito, e $\{ 1 \}$ il sottogruppo banale. Mostrate che $| G : \{ 1 \} | = | G |$.

(5) Per ogni n, trovate un esempio di un gruppo G e di un suo sottogruppo normale di indice n.

(SUGGERIMENTO: Cercate per esempio in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.)

Esercizio 3.2.

(1) Date la definizione di ideale in un anello.

(2) Dimostrate che i sottoanelli e gli gli ideali di $\mathbf{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbf{Z}$, per $n \in \mathbf{N}$.

(3) Date la definizione di relazione di equivalenza su un anello, compatibile con le operazioni.

(4) (a) Mostrate che ogni relazione di equivalenza su un anello che sia compatibile con le operazioni è una congruenza modulo un ideale.
In dettaglio, se R è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni sull'anello A, allora $[0]$ è un ideale, e aRb se e solo se $a - b \in [0]$.
(b) Mostrate inoltre che $[a] = a + [0]$ per $a \in A$.

(5) (a) Mostrate che una congruenza modulo un ideale è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni.
In dettaglio, se I è un ideale dell'anello A, allora la relazione definita da aRb se e solo se $a - b \in I$ è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni.
(b) Mostrate inoltre che $a + I = [a]$ per $a \in A$.

(6) Mostrate che se I è un ideale dell'anello A, allora l'insieme

$$A/I = \{ a + I : a \in A \}$$

delle classi laterali di I in A diventa un anello (che si dice *anello quoziente* di A rispetto a I), con le operazioni

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \qquad (a + I)(b + I) = ab + I.$$

(SUGGERIMENTO: Basta che mostriate che sono ben definite; badate che è stato già fatto nei punti precedenti, basta raccogliere i vari elementi.)

Esercizio 3.3.

(1) Qualunque sia l'anello A, si mostri che $\{ 0 \}$ e A sono ideali di A.
(2) Sia I un ideale dell'anello con unità A.
  (a) Si mostri che $I = A$ se e solo se $1 \in I$.
  (b) Si mostri che $I = A$ se e solo se I contiene una unità (cioè un elemento invertibile).
  (c) Si mostri che se A è un campo, gli unici ideali di A sono $\{ 0 \}$ e A. (Si dice che A è un anello *semplice*.)
(3) (Questo punto è facoltativo) Sia ora A l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in un campo, diciamo $\mathbf{Q}$.
  Si mostri che gli unici ideali di A sono $\{ 0 \}$ e tutto A.
  (SUGGERIMENTO: Sia $I \neq \{ 0 \}$ un ideale di A. Sia $0 \neq a \in I$,
$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
  Uno degli elementi di a sarà diverso da zero. Se $a_{ij} \neq 0$, allora mostrate che $a_{ij}^{-1} e_{1i} a e_{j1} = e_{11} \in I$. Qui e_{st} è la matrice che ha zero dappertutto, tranne 1 nel posto (s, t). Mostrate ora che $1 = e_{11} + e_{21} e_{11} e_{12} \in I$.)
(4) (Questo punto è facoltativo) Generalizzate il punto precedente al caso delle matrici $n \times n$ a coefficienti in un campo.
(5) (Questo punto è facoltativo) Che succede se considero per esempio le matrici a coefficienti in $\mathbf{Z}$?

Esercizio 3.4.

(1) Definite il nucleo di un morfismo fra anelli.
(2) Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per anelli nella versione con il nucleo e l'anello quoziente.

Esercizio 3.5.

(1) Date la definizione di sottogruppo normale in un gruppo.
(2) Mostrate che sono equivalenti, per un sottogruppo N del gruppo G,
  (a) N è normale in G,
  (b) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1} N a = N$,
  (c) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1} N a \subseteq N$, e
  (d) per ogni $a \in G$ e ogni $x \in N$ si ha $a^{-1} x a \in N$.
(3) Dite chi sono i sottogruppi normali di $\mathbf{Z}$.
(4) Date la definizione di relazione di equivalenza su un gruppo, compatibile con l'operazione.
(5) Mostrate che ogni relazione di equivalenza su un gruppo che sia compatibile con l'operazione è una congruenza modulo un sottogruppo normale.
(6) Mostrate che una congruenza modulo un sottogruppo normale è una relazione di equivalenza compatibile con l'operazione.
(7) Mostrate che se N è un sottogruppo normale del gruppo G, allora l'insieme
$$G/N = \{ aN : a \in G \}$$

delle classi laterali di N in G diventa un gruppo (che si dice *gruppo quoziente* di G rispetto a N), con l'operazione

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N.$$

(Suggerimento: Basta che mostriate che è ben definita; badate che è stato già fatto nei punti precedenti, basta raccogliere i vari elementi.)

Esercizio 3.6. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per gruppi nella versione con il nucleo e il gruppo quoziente.

Esercizio 3.7.

(1) Fate vedere che ogni ideale è il nucleo di un morfismo di anelli.

(Suggerimento: L'ideale I dell'anello A è il nucleo del morfismo $\pi : A \to A/I$ che manda a in $a + I$.)

(2) Fate vedere che ogni sottogruppo normale è il nucleo di un morfismo di gruppi.

(Suggerimento: Il sottogruppo normale N del gruppo G è il nucleo del morfismo $\pi : G \to G/N$ che manda a in aN.)

Esercizio 3.8 (Facoltativo).

(1) Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo, e $\mathfrak{S} = \{ aH : a \in G \}$ l'insieme delle classi laterali sinistre di H in G. Mostrate che se l'operazione

$$aH \cdot bH = (ab)H$$

su $\mathfrak{S}$ è ben definita, allora H è un sottogruppo normale di G. (Notate che a rigore, non si potrebbe dire che "$\cdot$" è un'operazione su $\mathfrak{S}$ finché non si sa che è ben definita.)

(2) Enunciate e dimostrate il risultato equivalente per gli anelli.