TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 15

Esercizio 15.1 (Facoltativo). Sia $\mathfrak{F}$ il piano proiettivo sul campo con due elementi, detto anche *piano di Fano*.

Mostrate che

(1) $\mathfrak{F}$ ha 7 punti,
(2) $\mathfrak{F}$ ha 7 rette,
(3) su ogni retta ci sono 3 punti, e
(4) per ogni punto passano 3 rette.

Esercizio 15.2 (Facoltativo). Sia $\mathfrak{P}$ il piano proiettivo sul campo finito F con q elementi.

Si mostri che

(1) $\mathfrak{P}$ ha $q^2 + q + 1$ punti,
(2) $\mathfrak{P}$ ha $q^2 + q + 1$ rette,
(3) su ogni retta ci sono $q + 1$ punti, e
(4) per ogni punto passano $q + 1$ rette.

Esercizio 15.3 (Facoltativo). Una *matrice di incidenza* di un piano proiettivo $\mathfrak{P}$ con $\mathfrak{p}$ punti (e altrettante rette, per l'Esercizio 15.2) è una matrice $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ in cui ogni riga corrisponde a una retta, ogni colonna corrisponde a un punto, e nella posizione (i, j) c'è 1 se il punto j-simo giace sulla retta i-sima, 0 altrimenti.

Si mostri che i 7 elementi del codice di Hamming di lunghezza 7 che contengono tre 1 e quattro 0 formano una matrice di incidenza per il piano di Fano $\mathfrak{F}$ dell'Esercizio 15.1.

Esercizio 15.4 (Facoltativo). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo F, che per ora è qualsiasi.

Sia $V^\star$ il duale di V, dunque lo spazio di tutte le funzioni lineari $V \to F$, che sapete avere anche dimensione n.

(Suggerimento: Se $e_1, \dots, e_n$ è una base di V, allora $e_1^\star, \dots, e_n^\star$ è una base di $V^\star$, ove $e_i^\star \in V^\star$ è definito da $e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è il solito delta di Kronecker.)

Per ogni sottospazio U di V, si consideri

$$U^\perp = \{ f \in V^\star : f(u) = 0 \text{ per ogni } u \in U \} .$$

(1) Si mostri che $U^\perp$ è un sottospazio di $V^\star$, di dimensione $n - \dim(U)$.

    (Suggerimento: Questo è solo un modo di riformulare quanto sapete sullo spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.)

(2) Si mostri che $U \mapsto U^\perp$ stabilisce una biiezione fra i sottospazi di V e di $V^\star$, la cui inversa manda un sottospazio L di $V^\star$ in

$$L^\perp = \{ u \in V : f(u) = 0 \text{ per ogni } f \in L \} .$$

(Suggerimento: Se avete studiato il biduale $V^{\star\star}$, e sapete che è isomorfo in modo naturale a V (dato che V ha dimensione finita), la funzione $L \mapsto L^{\perp}$ è la stessa di prima, solo che parte da $V^{\star}$ invece che da V.)

Sia ora F un campo finito.

(1) Si mostri che per ogni $0 \leq k \leq n$ si ha che V ha lo stesso numero di sottospazi di dimensione k e $n - k$.
(2) Si mostri che un piano proiettivo finito ha tanti punti quante rette.