TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 14

Esercizio 14.1. Sia D un UFD e siano $a_1, \dots, a_n$ elementi non nulli in D la cui fattorizzazione è

$$a_i = \varepsilon_i \prod_{j=1}^{k} p_j^{e_{ij}}$$

ove ogni ε_i è un'unità, i p_j sono irriducibili a due a due non associati in D e ogni e_{ij} è un intero non negativo. Sia $m_j = \min\{e_{ij} : i = 1, \dots n\}$ per $j = 1, \dots, n$.

Si mostri che

$$d = \prod_{j=1}^{k} p_j^{m_j}$$

è un MCD di $a_1, \dots, a_n$.

Esercizio 14.2. Sia D un UFD, e F il suo campo dei quozienti. Volendo, nel seguito si può assumere $D = \mathbf{Z}$ e $F = \mathbf{Q}$.

Un polinomio non nullo $f \in D[x]$ si dice *primitivo* se il massimo comun divisore dei suoi coefficienti è 1.

(1) Si mostri che ogni $0 \neq f \in D[x]$ si può scrivere nella forma

$$f = cf_1,$$

ove $c \in D$, e f_1 è primitivo.

(2) Si mostri che se $0 \neq c, d \in D$, e $0 \neq f, g \in D[x]$ sono polinomi primitivi, e $cf = dg$, allora c e d sono associati in D, cioè $d = cu$, ove $u \in D$ è una unità.

(3) Si mostri che ogni polinomio $0 \neq f \in F[x]$ si può scrivere come $f = \alpha f_1$, ove $\alpha \in F$, e $f_1 \in D[x]$ è primitivo.

(4) Si mostri che se $0 \neq f \in F[x]$, e

$$f = \alpha f_1 = \beta f_2$$

con $\alpha, \beta \in F$, e $f_1, f_2 \in D[x]$ primitivi, allora $\beta = \alpha u$, ove u è una unità di D.

(5) Si mostri che se $0 \neq f, g \in D[x]$ sono *primitivi* e associati in $F[x]$ (cioè esiste $\alpha \in F$ tali che $g = \alpha f$), allora sono associati anche in $D[x]$, cioè $\alpha \in D$ è una unità in D

(6) Si mostri che il prodotto di due polinomi primitivi è primitivo. (Questo è noto come *Lemma di Gauss.*)

(7) Si mostri che se $f \in D[x]$ ha grado positivo, ed è irriducibile in $D[x]$, allora è primitivo.

(8) Si mostri che se $f \in D[x]$ ha grado positivo, ed è irriducibile in $D[x]$, allora è irriducibile in $F[x]$.

(9) Si mostri che se $f \in D[x]$ è primitivo in $D[x]$ ed è irriducibile in $F[x]$, allora f è irriducibile in $D[x]$.

(Suggerimento: sia $f = gh$ con $g, h \in D[x]$. Vogliamo mostrare che almeno uno fra g e h è unità. Se grado$(g) = 0$ oppure grado$(h) = 0$, allora $g \in D$ oppure $h \in D$. Visto che f è primitivo, ciò implica che g è unità o h è unità in D (e quindi anche in $D[x]$). Rimane da analizzare il caso $0 <$ grado(g), grado$(h) <$ grado(f), che tuttavia non si può verificare. Infatti in tal caso f sarebbe prodotto di due polinomi di grado positivo in $D[x]$ e quindi anche in $F[x]$. Ciò non è possibile, perché f è irriducibile in $F[x]$.)

(10) Mostrate che ogni elemento diverso da zero ed unità di $D[x]$ si può scrivere come prodotto di irriducibili.

(11) Mostrate che la fattorizzazione del punto precedente è unica a meno di riordinare i termini e di unità.