TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 13

Avvertenza. In rosso e in blu le correzioni rispetto alla prima versione.

Esercizio 13.1.

(1) Si mostri che l'ideale $(2, x)$ di $\mathbf{Z}[x]$ non è principale.

(Suggerimento: Questo segue immediatamente dall'Esercizio 12.10(1).)

(2) Mostrate che $\mathbf{Z}[x]/(2)$ è un dominio, ma non un campo.

(Suggerimento: Per questo, posto $a \mapsto \bar{a}$ il solito morfismo $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, si mostri che il morfismo $\mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[x]$ indotto (come in Eisenstein) da $a \mapsto \bar{a}$ e da $x \mapsto x$ è suriettivo, ed ha come nucleo (2).)

(3) Dal fatto che $\mathbf{Z}[x]/(2)$ è un dominio segue dall'Esercizio 12.10(3) che 2 è primo in $\mathbf{Z}[x]$ (e dunque irriducibile).

(4) Del fatto che 2 sia primo in $\mathbf{Z}[x]$ si può dare una dimostrazione diretta, sul modello di Eisenstein. Sia più in generale $p \in \mathbf{Z}$ un primo, e mostriamo che p è primo anche in $\mathbf{Z}[x]$. Supponiamo $p \mid ab$, con $a, b \in \mathbf{Z}[x]$, ma $p \nmid a$. Allora esiste k tale che $p \mid a_0, \dots, a_{k-1}$, ma $p \nmid a_k$. Voglio mostrare che $p \mid b_i$ per ogni i. Da

$$p \mid b_0 a_k + b_1 a_{k-1} + \dots b_k a_0$$

segue $p \mid b_0$. Da

$$p \mid b_0 a_{k+1} + b_1 a_k + b_2 a_{k-1} + \dots b_{k+1} a_0$$

segue $p \mid b_1$, e cosí via.

Esercizio 13.2.

(1) Si mostri che in un PID, se $a \neq 0$ non è una unità, allora esiste un irriducibile p tale che $p \mid a$.

(2) Si mostri che in un PID, se $a \neq 0$ non è una unità, allora si può scrivere a come prodotto di irriducibili.

Esercizio 13.3. Si definisca il concetto di intero algebrico, e si mostri che la somma e il prodotto di interi algebrici è ancora un intero algebrico. (Comprende i risultati intermedi sull'anello finitamente generato come $\mathbf{Z}$-modulo.)