TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 12

Esercizio 12.1. Ricordando che se $G = \langle\, a \,\rangle$ è un gruppo ciclico di ordine n, allora c'è un isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} &\to G \\ [k] &\mapsto a^k, \end{aligned}$$

si mostri, usando i teoremi di isomorfismo, che un gruppo ciclico ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine.

Esercizio 12.2. Enunciate e dimostrate il

Teorema (Secondo teorema di isomorfismo per anelli). *Sia A un anello, B un suo sottoanello, I un suo ideale.*

1. *$B + I = \{\, x + y : x \in B, y \in I \,\}$ è un sottoanello di A contenente l'ideale I.*
2. *$B \cap I$ è un ideale di B.*
3. *La funzione*

$$\begin{aligned} \psi : \frac{B}{B \cap I} &\to \frac{B + I}{I} \\ x + B \cap I &\mapsto x + I \end{aligned}$$

è un isomorfismo di anelli.

Esercizio 12.3. Si enunci e si dimostri il

Teorema (Terzo teorema di isomorfismo per anelli). *Sia A un anello, I un suo ideale*

1. *I sottoanelli di A/I sono della forma J/I, ove J è un sottoanello di A che contiene I;*
2. *sia J un sottoanello di A contenente I, allora J/I è un ideale di A/I se e solo se J è un ideale di A;*
3. *se J è un ideale di A contenente I, si ha un isomorfismo fra*

$$\frac{A/I}{J/I} \qquad e \qquad A/J.$$

Esercizio 12.4. Si trovi in $\mathbf{Z}$ un esempio di due sottogruppi (che sono dunque anche sottoanelli e ideali) tali che la loro unione non sia un sottogruppo (e dunque neanche un sottoanello o un ideale.

(Suggerimento: Prendete ad esempio $2\mathbf{Z}$ e $3\mathbf{Z}$.)

Esercizio 12.5.

(1) Sia G un gruppo, $H, K \le G$.

Si mostri che sono equivalenti:

(a) $H \cup K$ è un sottogruppo di G, e

   (b) $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.
   (SUGGERIMENTO: Si supponga $H \nsubseteq K$, e si mostri che $K \subseteq H$.)
(2) Si enuncino e si dimostrino le affermazioni analoghe per sottoanelli e ideali.
(3) Mostrate che l'unione di una successione ascendente

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \ldots$$

di sottogruppi/sottoanelli/ideali è un sottogruppo/sottoanello/ideale.

Esercizio 12.6. Sia $(\mathcal{P}, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, e sia $M \in \mathcal{P}$.
(1) Si dica quand'è che
   (a) M è un elemento *massimo* di $(\mathcal{P}, \leq)$;
   (b) M è un elemento *massimale* di $(\mathcal{P}, \leq)$;
(2) Si mostri che un massimo, se c'è, è unico.
(3) Si mostri che un massimo è massimale.
(4) Si dia un esempio di massimale che non è massimo.

Esercizio 12.7. Sia A un anello commutativo con unità, e $a_1, \ldots, a_n \in A$.
Si mostri che il più piccolo ideale di A che contenga $a_1, \ldots, a_n$ è

$$(a_1, \ldots, a_n) = \{ a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n : u_i \in A \}.$$

Un ideale di questa forma si dice *finitamente generato*.

Esercizio 12.8.
(1) Si definisca il concetto di anello (commutativo) Noetheriano.
(2) Si mostri che per un anello commutativo con unità A sono equivalenti
   (a) A è Noetheriano.
   (b) ogni ideale di A è finitamente generato, e
   (c) ogni insieme non vuoto di ideali di A ha un elemento massimale rispetto all'inclusione.
(3) Si mostri che un PID è Noetheriano.

Esercizio 12.9. Enunciate e dimostrate il teorema della base di Hilbert.

Esercizio 12.10.
(1) Sia A un dominio, $0 \neq a \in A$. Mostrate che sono equivalenti:
   (a) a è invertibile in A;
   (b) (a, x) è un ideale principale di $A[x]$;
   (c) $(a, x) = A[x]$.
(2) Mostrate che se A è un dominio, allora l'anello dei polinomi $A[x]$ è un PID se e solo e A è un campo.
(3) Mostrate che se A è un dominio, e $0 \neq p \in A$ non è una unità, allora $A/(p)$ è un dominio se e solo se p è primo.
(4) Mostrate che se A è un PID, e $0 \neq p \in A$ non è una unità, allora p è irriducibile se e solo se $A/(p)$ è un campo.
(5) Mostrate che in un PID gli irriducibili sono primi.