TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 9

Esercizio 9.1. Sia $F = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{ 0, 1, -1 \}$ il campo con 3 elementi.

(1) Si trovino i tre polinomi monici e irriducibili f_1, f_2, f_3 di grado 2 in $F[x]$, e sia $f_3 = x^2 + 1$.
(2) Si costruisca un campo $E = F[\alpha]$ con 9 elementi, ove α è radice di f_1. Si calcolino le potenze di α, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1, f_2, f_3.
(3) Si costruisca un campo $E = F[\beta]$ con 9 elementi, ove β è radice di f_2. Si calcolino le potenze di β, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1, f_2, f_3.

Esercizio 9.2.

(1) Si trovino i tre polinomi irriducibili f_1, f_2, f_3 di grado 4 in $F[x]$, ove $F = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, e $f_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
(2) Si costruisca un campo $E = F[\alpha]$ con 16 elementi, ove α è radice di f_1. Si calcolino le potenze di α, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1, f_2, f_3, e del polinomio $x^2 + x + 1$.
(3) Si costruisca un campo $E = F[\beta]$ con 16 elementi, ove β è radice di f_2. Si calcolino le potenze di β, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1, f_2, f_3, e del polinomio $x^2 + x + 1$.

(SUGGERIMENTO: Si noti che in ogni caso α ha periodo 15. Dunque si ha

$$0 = \alpha^{15} - 1 = (\alpha^5)^3 - 1 = (\alpha^5 - 1) \cdot ((\alpha^5)^2 + \alpha^5 + 1),$$

da cui $(\alpha^5)^2 + \alpha^5 + 1 = 0$, dato che $\alpha \neq 1$. Dunque α^5 è radice di $f = x^2 + x + 1$.

In modo simile, si mostri che α^3 è radice di f_3, partendo da $0 = \alpha^{15} - 1 = (\alpha^3)^5 - 1 = \dots$.

Qui sopra ho usato il prodotto notevole $a^3 - 1 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1)$. Per α^3 dovrò usare invece $a^5 - 1 = (a - 1) \cdot (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.)

Esercizio 9.3 (Facoltativo).

Sia p un primo. Si mostri che un campo con p^n elementi contiene un campo con p^m elementi se e solo se $m \mid n$.