TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 7

Esercizio 7.1 (Facoltativo, lo trovate svolto nelle Note). Mostrate che la matrice, a coefficienti in un campo F,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

è radice del polinomio

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Qui le costanti $a \in F$ si posso interpretare come matrici scalari.

Esercizio 7.2. Sia F un campo, $f \in F[x]$ monico e non costante..

(1) Si definisca il campo di spezzamento di f su F.
(2) Si dimostri che questo campo di spezzamento esiste.

Esercizio 7.3.

(1) Si definisca la caratteristica di un anello con unità.
(2) Si mostri che se un anello ha caratteristica zero, allora contiene un sottoanello isomorfo a $\mathbf{Z}$, mentre se ha caratteristica $m > 0$, allora contiene un sottoanello isomorfo a $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.
(3) Si mostri che la caratteristica di un dominio o è 0, o è un numero primo.
(4) Si mostri che se l'anello A ha caratteristica $m > 0$, allora per ogni $a \in A$ si ha $m \cdot a = 0$

Esercizio 7.4. Sia E un campo di caratteristica zero. Dunque contiene un sottoanello isomorfo a $\mathbf{Z}$.

Mostrate che allora E contiene un sottoanello isomorfo a $\mathbf{Q}$.

(Suggerimento: Sfruttate il fatto che $\mathbf{Q}$ è il campo dei quozienti di $\mathbf{Z}$, e la proprietà universale del campo dei quozienti.)

Esercizio 7.5. Sia E un campo finito.

(1) Si mostri che la caratteristica di E è un numero primo p, e dunque E è una estensione di $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
(2) Si mostri che la dimensione $|E : \mathbf{F}_p| = n$ è finita.
(3) Si mostri che $|\, E \,| = p^n$.