TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 5

Esercizio 5.1. Si mostri che $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{Q}$.

(SUGGERIMENTO: Analoga a quella per $\sqrt{2}$. Proviamo a scrivere $\sqrt[3]{2} = s/t$, con s, t interi positivi coprimi. (Dunque la frazione s/t è ridotta ai minimi termini.) Allora $s^3 = 2t^3$. Ora si può notare che nella fattorizzazione in fattori primi, il primo 2 compare in s^3 un numero di volte che è un multiplo di 3, mentre in $2t^3$ compare un numero di volte pari a un multiplo di 3 più 1. In alternativa, $2 \mid s^3$, dunque $s = 2s'$ è pari, $8(s')^3 = 2t^3$, dunque $4(s')^3 = t^3$, e anche t è pari, contro il fatto che $\gcd(s, t) = 1$.)

Esercizio 5.2. Si trovino i polinomi minimi su $\mathbf{Q}$ di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 5.3. Si trovi il polinomio minimo su $\mathbf{R}$ di i.

Esercizio 5.4.
Sia $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, con $a_0, a_n \neq 0$.

(1) Sia $r = s/t$ un numero razionale, con $s, t \in \mathbf{Z}$, $\gcd(s, t) = 1$.
Si mostri che se r è una radice di f, allora $t \mid a_n$ e $s \mid a_0$.

(2) Sia $a_n = 1$, dunque f è monico.
Si mostri che se $r \in \mathbf{Q}$ è radice di f, allora $r \in \mathbf{Z}$, e r divide a_0. (Questo si chiama il *teorema della radice razionale*.)

(3) Applicate il precedente per mostrare senza troppi conti che $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.

Esercizio 5.5. Si consideri $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(1) Si mostri che α è radice del polinomio $f = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbf{Q}[x]$.

(2) Si mostri che le radici di f sono i quattro numeri $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$, e che dunque

$$\begin{aligned} f = {} & (x - (+\sqrt{2} + \sqrt{3}))\cdot \\ & (x - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}))\cdot \\ & (x - (+\sqrt{2} - \sqrt{3}))\cdot \\ & (x - (-\sqrt{2} - \sqrt{3})). \end{aligned}$$

(3) Si mostri che $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ per ogni scelta dei segni.

(4) Sia ora m il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}$. Si spieghi perché m divide f.

(5) Si noti che in $\mathbf{R}[x]$ si ha che $x - \alpha$ divide m, dato che α è una radice di m.

(6) Si mostri che $f = m$. Per questo si faccia vedere che l'unico divisore monico $g \in \mathbf{Q}[x]$ di f che sia a sua volta divisibile per $x - \alpha$ è f stesso.

(SUGGERIMENTO: Per quel che riguarda l'ultima domanda, occorre distinguere le possibilità per il grado di g. Se $\text{grado}(g) = 1$, allora $g = x - \alpha$, e qui si usa uno dei punti precedenti. Se $\text{grado}(g) = 2$, allora $g = (x - \alpha)(x - \beta)$, ove β è una delle altre radici di f, dunque ci sono tre casi da considerare. Infine se $\text{grado}(g) = 3$, conviene notare che dato che $g \in \mathbf{Q}[x]$, e g divide f, deve essere $f = gh$ per un opportuno $h \in \mathbf{Q}[x]$ (monico) di grado 1, dunque h è un divisore di grado 1 di $f \dots$)

Esercizio 5.6. Si consideri $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{C}$.

(1) Si trovi un polinomio monico $f \in \mathbf{Q}[x]$ di grado 4 di cui α è radice.
(2) Si mostri che $|\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}| \leq 4$.
(3) Si mostri che $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}[\alpha]$.
(4) Si mostri che $F = \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbf{Q}[\alpha]$.
(5) Si mostri che $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}[\alpha]$.
(6) Si mostri che $F[\sqrt{3}] \subseteq \mathbf{Q}[\alpha]$.
(7) Si mostri che $|F[\sqrt{3}] : \mathbf{Q}| = 4$.
(8) Si mostri che $F[\sqrt{3}] = (\mathbf{Q}[\sqrt{2}])[\sqrt{3}] = \mathbf{Q}[\alpha]$.
(9) Si mostri che $|\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}| = 4$.
(10) Si mostri che f è il polinomio minimo di α su $\mathbf{Q}$.

Esercizio 5.7. Si trovi, col metodo dell'Esercizio 5.6, il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di uno dei seguenti elementi

$$\sqrt{2} + \sqrt{5}, \sqrt{3} - \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}.$$

Esercizio 5.8. Sia B/F una estensione, con B, F campi, e K un campo, con $F \subseteq K \subseteq B$. Sia $\alpha \in B$.

(1) Si mostri che α è algebrico su B, e il polinomio minimo di α su B è $x - \alpha$.
(2) Si mostri che se α è algebrico su F, con polinomio minimo m_F, allora è algebrico anche su K, e per il polinomio minimo m_K di α su K si ha
$$m_K \mid m_F.$$
(3) In particolare, in $B[x]$ si ha
$$x - \alpha \mid m_F.$$

Esercizio 5.9. Sia B/F una estensione del campo F.

(1) Si mostri che se il grado $|B : F|$ è finito, allora ogni elemento di B è algebrico su F.
(2) Si mostri che sotto le ipotesi precedenti, se $\alpha \in B$, allora $|F[\alpha] : F|$ divide $|B : F|$.

(Suggerimento: Non l'abbiamo fatto a lezione, ma è una immediata conseguenza della Formula dei Gradi.

[**Aggiunta!** La formula dei gradi vale in questa situazione generale: B è un anello commutativo con unità 1, che abbia sottoanelli F, K contenenti 1 che siano campi. Allora posso vedere B come spazio vettoriale sia su F che su K, e K come spazio vettoriale su F, e se le dimensioni sono finite si ha $|B : F| = |B : K| \cdot |K : F|$.])