TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 3

Esercizio 3.1.

(1) Date la definizione di ideale in un anello.
(2) (Questo si sovrappone all'Esercizio 2.16)
Dimostrate che gli ideali di $\mathbf{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbf{Z}$, per $n \geq 0$.
(3) Date la definizione di relazione di equivalenza su un anello, compatibile con le operazioni.
(4) Mostrate che ogni relazione di equivalenza su un anello che sia compatibile con le operazioni è una congruenza modulo un ideale.
(5) Mostrate che una congruenza modulo un ideale è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni.
(6) Mostrate che se I è un ideale dell'anello A, allora l'insieme
$$A/I = \{ a + I : a \in A \}$$
delle classi laterali di I in A diventa un anello (che si dice *anello quoziente* di A rispetto a I), con le operazioni
$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \qquad (a + I)(b + I) = ab + I.$$
(Suggerimento: Basta che mostriate che sono ben definite; badate che è stato già fatto nei punti precedenti, basta raccogliere i vari elementi.)

Esercizio 3.2.

(1) Qualunque sia l'anello A, si mostri che $\{ 0 \}$ e A sono ideali di A.
(2) Sia I un ideale dell'anello con unità A.
 (a) Si mostri che $I = A$ se e solo se $1 \in I$.
 (b) Si mostri che $I = A$ se e solo se I contiene una unità (cioè un elemento invertibile).
 (c) Si mostri che se A è un campo, gli unici ideali di A sono $\{ 0 \}$ e A. (Si dice che A è un anello *semplice*.)
(3) (Questo punto è facoltativo) Sia ora A l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in un campo, diciamo $\mathbf{Q}$.
Si mostri che gli unici ideali di A sono $\{ 0 \}$ e tutto A.
(Suggerimento: Sia $I \neq \{ 0 \}$ un ideale di A. Sia $0 \neq a \in I$,
$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
Uno degli elementi di a sarà diverso da zero. Se $a_{ij} \neq 0$, allora mostrate che $a_{ij}^{-1} e_{1i} a e_{j1} = e_{11} \in I$. Qui e_{st} è la matrice che ha zero dappertutto, tranne 1 nel posto (s, t). Mostrate ora che $1 = e_{11} + e_{21} e_{11} e_{12} \in I$.)
(4) (Questo punto è facoltativo) Generalizzate il punto precedente al caso delle matrici $n \times n$ a coefficienti in un campo.
(5) (Questo punto è facoltativo) Che succede se considero per esempio le matrici a coefficienti in $\mathbf{Z}$?

Esercizio 3.3. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per anelli nella versione con il nucleo e l'anello quoziente.

Esercizio 3.4.

(1) Date la definizione di sottogruppo normale in un gruppo.
(2) Mostrate che sono equivalenti, per un sottogruppo N del gruppo G,
  (a) N è normale in G,
  (b) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1}Na = N$,
  (c) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1}Na \subseteq N$, e
  (d) per ogni $a \in G$ e ogni $x \in N$ si ha $a^{-1}xa \in N$.
(3) Dite chi sono i sottogruppi normali di $\mathbf{Z}$.
(4) Date la definizione di relazione di equivalenza su un gruppo, compatibile con l'operazione.
(5) Mostrate che ogni relazione di equivalenza su un gruppo che sia compatibile con l'operazione è una congruenza modulo un sottogruppo normale.
(6) Mostrate che una congruenza modulo un sottogruppo normale è una relazione di equivalenza compatibile con l'operazione.
(7) Mostrate che se N è un sottogruppo normale del gruppo G, allora l'insieme

$$G/N = \{ aN : a \in G \}$$

delle classi laterali di N in G diventa un gruppo (che si dice *gruppo quoziente* di G rispetto a N), con l'operazione

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N.$$

(Suggerimento: Basta che mostriate che è ben definita; badate che è stato già fatto nei punti precedenti, basta raccogliere i vari elementi.)

Esercizio 3.5. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per gruppi nella versione con il nucleo e il gruppo quoziente.

Esercizio 3.6. Sia B un anello commutativo con unità 1, estensione del campo F, con $1 \in F$.

Mostrate come si può vedere B come spazio vettoriale su F.

Esercizio 3.7. Si ricordi che un ideale I di un anello A è detto principale se $I = (a) = \{ au : u \in A \}$ per qualche $a \in A$.

(1) Si dia la definizione di dominio a ideali principali.
(2) Si mostri che un dominio euclideo è un dominio a ideali principali, facendo vedere che se $I \neq \{ 0 \}$ è un ideale del dominio euclideo A, allora $A = (a)$, ove a è un elemento di I di norma minima fra gli elementi diversi da 0 di I.
(3) Come caso particolare, sia $I \neq \{ 0 \}$ un ideale dell'anello $F[x]$ dei polinomi, ove F è un campo. Si mostri che $I = (a)$, ove a è un polinomio di grado minimo fra gli elementi diversi da zero di I, che può essere scelto monico.

Esercizio 3.8. Sia A un dominio, $a, b \in A$.

(1) Su mostri che $a \in (a)$
(2) Si mostri che sono equivalenti

    (a) $a \mid b$,
    (b) $(a) \ni b$, e
    (c) $(a) \supseteq (b)$.
(3) Si mostri che sono equivalenti
    (a) $(a) = (b)$,
    (b) $a \mid b$ e $b \mid a$, ovvero $b = \varepsilon a$ per una unità ε.
(4) Si mostri che $(1) = A$.
(5) Si mostri che sono equivalenti
    (a) $(a) = A$, e
    (b) a è una unità.

Esercizio 3.9. Sia B/F una estensione di un campo F, e $\alpha \in B$. Si dica quando α è algebrico e quando è trascendente su F.