

TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 12

Esercizio 12.1. Sia A un dominio, $A[x]$ l'anello dei polinomi, $a \in A[x]$.

Identifichiamo come d'uso A col sottoanello di $A[x]$ dei polinomio costanti, cioè quelli in cui non compare x .

- (1) Si mostri che sono equivalenti
 - (a) a è un polinomio di grado 0, e
 - (b) a è una costante non nulla.
- (2) Si mostri che sono equivalenti
 - (a) a è invertibile in $A[x]$, e
 - (b) a è una costante non nulla, dunque $a \in A$, e a è invertibile in A .Come caso particolare, si mostri che gli elementi invertibili di $\mathbf{Z}[x]$ sono $1, -1$.
- (3) Sia ora $A = F$ un campo, e $a \in F[x]$. Si mostri che sono equivalenti
 - (a) a è invertibile in $F[x]$,
 - (b) a è un polinomio di grado 0, e
 - (c) a è una costante non nulla.
- (4) Si mostri che se $a, b \in F[x]$, allora $a \mid b$ e $b \mid a$ se e solo se $a = b\varepsilon$, con $\varepsilon \in F$ una costante non nulla.

Esercizio 12.2. Sia dia la definizione di elemento irriducibile e elemento primo in un dominio.

Esercizio 12.3. Sia A un dominio, $a, b, c \in A$, con $a \neq 0$, e sia $a = bc$.

Si mostri che

- se b è una unità, allora c è associato ad a ;
- se b è associato ad a , allora c è una unità.

Esercizio 12.4. Sia A un dominio, e $a \in A$, che non sia né zero, né una unità.

Si mostri che sono equivalenti

- (1) a è irriducibile, ovvero i suoi soli divisori sono gli elementi invertibili, e i cosiddetti elementi *associati* ad a .
- (2) Per ogni $u, v \in A$, se $a = uv$, allora o u o v è invertibile.
- (3) Per ogni $u, v \in A$, se $a = uv$, allora o u o v è associato ad a .
- (4) Per ogni $u, v \in A$, se $a = uv$, allora o u è invertibile, o u è associato ad a .
- (5) Per ogni $u, v \in A$, se $a = uv$, allora
 - o u è invertibile, e v è associato ad a ,
 - o u è associato ad a , e v è invertibile.

Esercizio 12.5. Sia A un dominio, $a \in A$, con $a \neq 0$, e a non una unità. Mostrate che sono equivalenti:

- (1) a non è irriducibile (ovvero è riducibile), e
- (2) esistono $u, v \in A$ tali che $a = uv$, e né u né v è una unità.

Esercizio 12.6. Sia A un dominio.

- (1) Definite il concetto di norma su A .
- (2) Fate vedere che la norma di un'unità è 1.
- (3) Mostrate un esempio di dominio e di norma tale che ci sono elementi di norma 1 che non sono unità.
- (4) Definite il concetto di norma speciale.
- (5) Fate vedere che \mathbf{Z} e $\mathbf{Z}[x]$ hanno norme speciali.
- (6) Fate vedere che la norma $N(a) = 2^{\text{grado}(a)}$ è speciale nell'anello $F[x]$ dei polinomi a coefficienti in un campo F .

Esercizio 12.7.

- (1) Mostrate che $\mathbf{Z}[i]$ ha una norma speciale, e mostrate che le unità sono $\pm 1, \pm i$.
- (2) Mostrate che $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ ha una norma speciale, e mostrate che le unità sono ± 1 .

Esercizio 12.8.

- (1) Mostrate che in un dominio dotato di una norma speciale
 - (a) se un elemento ha norma un numero primo, allora l'elemento è irriducibile;
 - (b) in generale non vale il viceversa;
 - (c) ogni elemento (diverso da zero, e che non sia una unità), si scrive come prodotto di irriducibili. Un dominio con questa proprietà si dice **atomico**.