**TRENTO, A.A. 2021/22**
**CORSO DI ALGEBRA A**
**FOGLIO DI ESERCIZI # 11**

*Esercizio* 11.1. Sia $A$ un anello commutativo con unità, $A[x]$ l'anello dei polinomi, $a, b \in A[x]$.

(1) Si dia la definizione di grado di $a$. Si mostri che la definizione di grado vale per tutti i polinomi, tranne il polinomio nullo.
(2) Si mostri che sono equivalenti
  (a) $a$ è un polinomio di grado 0, e
  (b) $a$ è una costante non nulla.
(3) Si mostri con un esempio che, scegliendo opportunamente $A, a, b$, può essere grado$(ab) \neq$ grado$(a)+$grado$(b)$ per $0 \neq a, b \in A[x]$. (Addirittura potrebbe essere $a \neq 0 \neq b$ e $ab = 0$, sicché $ab$ non ha neanche un grado.)
(4) Si mostri che se $A$ è un dominio, allora se $0 \neq a, b \in A[x]$ si ha $ab \neq 0$, e
$$\text{grado}(ab) = \text{grado}(a) + \text{grado}(b).$$
(5) Si mostri che in particolare, se $A$ è un dominio, anche $A[x]$ è un dominio.
(6) Si mostri che se $0 \neq a, b \in A[x]$, allora
$$\text{grado}(a + b) = \max(\text{grado}(a), \text{grado}(b)) \quad \text{se grado}(a) \neq \text{grado}(b).$$
(7) Si mostri con opportuni esempi che se grado$(a) =$ grado$(b)$, allora può essere $a + b = 0$, e grado$(a + b)$ può assumere qualsiasi valore fra 0 e grado$(a) =$ grado$(b)$.

*Esercizio* 11.2 (Proprietà universale dell'anello dei polinomi).

Sia $B$ un anello commutativo con unità 1, e $A$ un sottoanello di $B$ contenente 1.

Si mostri che esiste un unico morfismo di anelli (detto morfismo di valutazione in $\alpha$)
$$v_\alpha : A[x] \to B$$
tale che
$$\begin{cases} v_\alpha(c) = c & \text{per } c \in A, \text{ e} \\ v_\alpha(x) = \alpha. \end{cases}$$
Si mostri che
$$v_\alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n,$$
per $n \in \mathbf{N}$ e $a_i \in A$.

*Esercizio* 11.3.

(1) Sia $B$ estensione di $A$, e $\alpha \in B$. Si mostri che il più piccolo sottoanello di $B$ che contenga $A$ e $\alpha$ è
$$A[\alpha] = \{\, a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n : n \in \mathbf{N}, a_i \in A \,\}$$

(2) Si mostri che l'immagine $v_\alpha(A[x])$ del morfismo di valutazione è $A[\alpha]$.

*Esercizio* 11.4. Sia $A$ un dominio, $a, b \in A$.

Definiamo su $A$ la divisibilità nel solito modo: si dice che $b$ divide $a$ (in simboli $b \mid a$) se esiste $c \in A$ tale che $a = bc$.

(1) Si mostri che la divisibilità è riflessiva e transitiva.
(2) Si mostri che sono equivalenti
    (a) $a \mid b$ e $b \mid a$,
    (b) $a = b\varepsilon$, con $\varepsilon \in A$ invertibile.
(3) Due elementi $a, b \in A$ si dicono *associati* (in simboli, $a \sim b$) se valgono le proprietà equivalenti del punto precedente.

    Mostrate che $\sim$ è un relazione di equivalenza. Questo segue dal prossimo punto, che è legato all'esercizio seguente.
(4) Sia $A \neq \emptyset$ un insieme, e $R$ una relazione su $A$ che sia riflessiva e transitiva. Mostrate che la relazione $Q$ su $A$ definita, per $a, b \in A$, da

$$aQb \text{ se e solo se } aRb \text{ e } bRa,$$

    è una relazione di equivalenza.

*Esercizio* 11.5 (Del tutto facoltativo, ma utile da sapere).

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme, e $R \subseteq A \times A$ una relazione su $A$. Dunque pensiamo $R$ come un sottoinsieme di $A \times A$, e $aRb$ equivale a $(a, b) \in R$.

(1) Una relazione $R$ è riflessiva se e solo se $\Delta \subseteq R$, ove $\Delta = \{ (a, a) : a \in A \}$ è la *diagonale*.
(2) La più piccola relazione riflessiva che contenga $R$ è $S = R \cup \Delta$.

    In altre parole, per $a, b \in A$ vale

$$aSb \text{ se e solo se } \begin{cases} aRb, & \text{oppure} \\ a = b. \end{cases}$$

(3) Una relazione $R$ è simmetrica se e solo se $R = R^{\text{inv}}$, ove per una relazione $T$ si scrive

$$T^{\text{inv}} = \{ (a, b) : (b, a) \in T \}.$$

(4) La *più piccola relazione simmetrica che contenga* $R$ è $Q = R \cup R^{\text{inv}}$.

    In altre parole, per $a, b \in A$ vale

$$aQb \text{ se e solo se } aRb \text{ oppure } bRa,$$

(5) La *più grande relazione simmetrica contenuta in* $R$ è $Q = R \cap R^{\text{inv}}$.

    In altre parole, per $a, b \in A$ vale

$$aQb \text{ se e solo se } aRb \text{ e } bRa,$$

(6) La più piccola relazione transitiva che contenga $R$ è la relazione $S$ definita come

$$aSb \qquad \text{se e solo se} \qquad \text{esistono } a_1 = a, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = b \text{ tali che } a_i R a_{i+1} \text{ per } i \leq n.$$

(7) La più piccola relazione di equivalenza che contenga $R$ è... lascio a voi la formulazione.

*Esercizio* 11.6. Sia $A$ un anello commutativo con unità, e $A[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in $A$.

Sia $b \in A[x]$ un polinomio di grado $n$, con $b_n$ invertibile in $A$.

Si mostri che in $A[x]$ si può fare la divisione con resto di ogni polinomio $a \in A[x]$ per $b$.

*Esercizio* 11.7. Data per buona la parte dell'esistenza, che si fa con l'algoritmo noto, del seguente teorema, si dimostri l'*unicità*.

*Teorema. Sia $F$ un campo, e $a, b \in F[x]$, con $b \neq 0$. Allora esistono unici $q, r \in F[x]$ tali che*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r = 0 \textit{ oppure } \operatorname{grado}(r) < \operatorname{grado}(b). \end{cases}$$

(Suggerimento: Sia $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, con gli $r_i$ che soddisfano le condizioni. Dunque

$$b(q_1 - q_2) = r_1 - r_2.$$

Se $q_1 = q_2$, allora anche $r_1 = r_2$. Se invece fosse $q_1 \neq q_2$, allora sarebbe anche $r_1 \neq r_2$, e si avrebbe

$$\operatorname{grado}(b(q_1 - q_2)) = \operatorname{grado}(b) + \operatorname{grado}(q_1 - q_2) \geq \operatorname{grado}(b)$$

mentre $\operatorname{grado}(r_1 - r_2)$ per un esercizio precedente è minore di $\operatorname{grado}(b)$.)

*Esercizio* 11.8. Sia $A$ un dominio.

(1) Si definisca il concetto di radice di $a \in A[x]$.
(2) Si enunci e si dimostri la Regola di Ruffini: sono equivalenti, per un polinomio $a \in A[x]$ e $\alpha \in A$
   (a) $\alpha$ è una radice di $a$, ovvero $v_\alpha(a) = 0$, e
   (b) $x - \alpha \mid a$.
(3) Si mostri che se $a \in A[x]$ ha grado $n$, allora $a$ ha al più $n$ radici distinte in $A$.
(4) Si dia un esempio di un anello commutativo $B$ con unità, e di un polinomio $b \in B[x]$ che ha grado 2 ma più di 2 radici in $B$.