TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 8

Esercizio 8.1.

(1) Sia G un semigruppo e $H \subseteq G$. Dite quando H è un sottosemigruppo di G.
(2) Mostrate che un sottosemigruppo di un semigruppo è un semigruppo rispetto alla (restrizione dell') operazione del semigruppo.
(3) Mostrate che l'immagine di un semigruppo sotto un morfismo di semigruppi è un sottosemigruppo del codominio.
(4) Sia $f : A \to B$ un morfismo suriettivo di semigruppi. Mostrate che la relazione R definita su A come xRy se e solo se $f(x) = f(y)$ è una relazione di equivalenza compatibile con l'operazione di semigruppo e che l'operazione $[x] \cdot [y] = [xy]$ induce su A/R una struttura di semigruppo.

Esercizio 8.2.

In questo esercizio potete utilizzare i risultati precedenti sui semigruppi.

(1) Sia G un gruppo, $H \subseteq G$. Dite quando H è un sottogruppo di G.
(2) Mostrate che un sottogruppo di un gruppo è un gruppo rispetto alle (restrizioni delle) operazioni del gruppo.
(3) Mostrate che l'immagine di un gruppo sotto un morfismo di gruppi è un sottogruppo del codominio.
(4) Sia A un anello, $S \subseteq A$. Dite quando S è un sottoanello di A.
(5) Mostrate che un sottoanello di un anello è un anello rispetto alle (restrizioni delle) operazioni dell'anello.
(6) Mostrate che l'immagine di un anello sotto un morfismo di anelli è un sottoanello del codominio.

Esercizio 8.3. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per gruppi.

Esercizio 8.4. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per anelli.

Esercizio 8.5. Ridimostrate il Teorema Cinese usando il primo teorema di isomorfismo per anelli.

Esercizio 8.6.

(1) Definite le potenze (in un gruppo con notazione moltiplicativa) e i multipli (in un gruppo con notazione additiva).
(2) Enunciate e dimostrate (almeno la singola dimostrazione che ho fatto a lezione) le regole delle potenze.
(3) Sia G un gruppo, e $a, b \in G$. Mostrate che sono equivalenti
    (a) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,
    (b) $(ab)^2 = a^2b^2$, e
    (c) $ab = ba$.
(4) Trovate un esempio di
    (a) un gruppo G,

(b) un intero $n \in \mathbf{Z}$,
(c) due elementi $a, b \in G$

tali che $(ab)^n \neq a^n b^n$.