TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 7

Esercizio 7.1. Siano $(G, \cdot, 1)$ e $(H, \cdot, 1)$ gruppi, $f : G \to H$ una funzione.

(1) Si dica quando f è un morfismo, e quando un isomorfismo.
(2) Si mostri che se f è un morfismo, allora $f(1) = 1$.
(3) Si mostri che se f è un morfismo, allora $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ per $a \in G$.

Esercizio 7.2 (Facoltativo).

(1) Sia $(H, \circ, f)$ un gruppo, e G un insieme.
    Sia $\varphi : G \to H$ una biiezione.
    Si mostri che con l'operazione
$$x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \circ \varphi(y))$$
    G diventa un gruppo, con elemento neutro $e = \varphi^{-1}(f)$.
    Questo fatto si chiama *trasporto di struttura*, nel senso che sto definendo un'operazione su G in termini di un'operazione su H, cioè sto *trasportando* la struttura di gruppo da H a G, tant'è che alla fine φ diventa un isomorfismo. È alla base di esercizi tipo il seguente.
(2) Si mostri che
$$(\mathbf{Z}, *, 1)$$
    è un gruppo, ove per $x, y \in \mathbf{Z}$
$$x * y = x + y - 1.$$

Esercizio 7.3. Siano A, B insiemi *finiti*. Sia B^A l'insieme delle funzioni da A a B. Si mostri che
$$\left| B^A \right| = |\, B \,|^{|\, A \,|},$$
ove conviene convenire che ai fini della formula sia $0^0 = 1$.

Esercizio 7.4.

(1) Definite i morfismi e gli isomorfismi di anelli.
(2) Date un esempio di due anelli con unità A e B, e di un morfismo $f : A \to B$ tale che $f(1) \neq 1$.
(3) Mostrate che se A, B sono due anelli con unità, e $f : A \to B$ è un morfismo *suriettivo*, allora $f(1) = 1$.
(4) Mostrate che se A, B sono due anelli con unità, $f : A \to B$ è un morfismo *suriettivo*, e $a \in A$ è invertibile, allora anche $f(a)$ lo è, e si ha $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Esercizio 7.5.

(1) Mostrate che se $f : A \to B$ è un isomorfismo di anelli, allora lo è anche $f^{-1} : B \to A$.
(2) Mostrate che se $f : A \to B$ è un isomorfismo di anelli, allora sono equivalenti, per $x \in A$.
    (a) x è invertibile in A, e

(b) $f(x)$ è invertibile in B.

Esercizio 7.6.

(1) Definite il prodotto diretto di due anelli, e fate vedere che è un anello. Dite in particolare chi sono l'elemento neutro e gli opposti.

Esercizio 7.7. Siano m, n interi positivi, con $\gcd(m, n) = 1$. Si consideri la funzione

$$f : \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$
$$[x]_{mn} \mapsto ([x]_m, [x]_n)$$

che sappiamo già da un esercizio precedente essere ben definita, ed essere una biiezione.

(1) Si mostri che f è un morfismo di anelli, e dunque un isomorfismo.
(2) Se ne deduca un'altra dimostrazione della formula $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ per la funzione di Eulero, per $\gcd(m, n) = 1$.