TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 6

Esercizio 6.1. Si enunci e si dimostri il criterio perché esista una soluzione del sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a & \pmod{m} \\ x \equiv b & \pmod{n}. \end{cases}$$

Esercizio 6.2. Dimostrate che se ho una soluzione particolare x_0 di un sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a & \pmod{m} \\ x \equiv b & \pmod{n}, \end{cases}$$

allora le soluzioni del sistema sono tutti gli x tali che

$$x \equiv x_0 \pmod{\operatorname{lcm}(m, n)}.$$

In altre parole, due congruenze (se hanno soluzione) equivalgono a una.

Esercizio 6.3. Si dica se i seguenti sistemi di congruenze sono risolubili, e in caso affermativo se ne trovino *tutte* le soluzioni.

$$\begin{cases} x \equiv 17 & \pmod{89} \\ x \equiv 28 & \pmod{55} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 17 & \pmod{6766} \\ x \equiv 28 & \pmod{1094} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 18 & \pmod{6766} \\ x \equiv 28 & \pmod{1094} \end{cases}$$

Esercizio 6.4. Siano m, n interi positivi, con $\gcd(m, n) = 1$. Si mostri che la funzione

$$f : \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$
$$[x]_{mn} \mapsto ([x]_m, [x]_n)$$

è ben definita, ed è una biiezione.

Esercizio 6.5.

(1) Si enunci e si dimostri il Teorema di Biiezione fra Insiemi.

(2) Lo si usi per dimostrare che se m, n sono interi positivi, allora la funzione

$$\mathbf{Z}/\operatorname{lcm}(m, n)\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}n\mathbf{Z}$$
$$[x]_{\operatorname{lcm}(m,n)} \mapsto ([x]_m, [x]_n)$$

è ben definita, ed è iniettiva. Se ne deduca la caerdinalità dell'immagine di questa funzione.

(3) Si mostri che se $\gcd(m, n) = 1$, il punto precedente dà una nuova dimostrazione dell'Esercizio 6.4.

Esercizio 6.6. Si definiscano morfismi e isomorfismo fra gruppi.