TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 4

Esercizio 4.1. Si dedinisca il concetto di anello, e si mostri che in un anello A vale $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ per ogni $a \in A$.

Esercizio 4.2. Sia $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ un numero scritto in forma decimale. Si mostri che se $n = 9$ o $n = 3$, si ha per le classi di congruenza

$$[a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0] = [a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0].$$

Come caso particolare, si dica quando il numero fatto di tutti uni $11 \cdots 1$ è divisibile per 3.

Esercizio 4.3. Si enuncino e si dimostrino i criteri di divisibilità per 7 e per 13.

Esercizio 4.4 (Facoltativo). Si consideri la seguente procedura. Parto da un numero scritto in forma decimale

$$a_n \ldots a_1 a_0 = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

Ad esempio

$$2018 = 8 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3.$$

Moltiplico fra loro le cifre, calcolo dunque $a_n \cdot \cdots \cdot a_1 \cdot a_0$. Ripeto la procedura. Per esempio parto da 382, ottengo $3 \cdot 8 \cdot 2 = 48$, ricalcolo $4 \cdot 8 = 32$, e infine $3 \cdot 2 = 6$, e qui mi fermo.

- Dimostrare che a un certo punto arrivo a un numero di una cifra, e qui dunque mi fermo.

  (Suggerimento: Per questo è sufficiente mostrare che se $n > 1$, e $a_n \neq 0$, allora $a_n \ldots a_1 a_0 > a_n \cdot (a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$. Ad esempio $382 > 3 \cdot 82$. Per questo, notate che $a_{n-1} \ldots a_1 a_0 < 10^n$.)
- Trovare tutti i numeri tali che applicando la procedura arrivo alla cifra 1. Naturalmente fra questi ci sono i numeri $111 \ldots 111$. Si tratta di mostrare che sono gli unici.

Esercizio 4.5. Sia $n \geq 2$. Sia $a \in \mathbf{Z}$. Si mostri che per la classe $[a] \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si ha

$$[a] \text{ è } \begin{cases} \text{invertibile} & \text{se e e solo se } \gcd(a, n) = 1, \\ \text{uno 0-divisore} & \text{se e solo se } \gcd(a, n) > 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.6. Si consideri $n = 12827$, e le classi $[a] = [4064], [4085] \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Per ognuna di esse, si dica se è invertibile (esibendo in tal caso come "prova" l'inverso) o se è un divisore dello zero (esibendo in tal caso come "prova" un elemento $[b] \neq [0]$ tale che $[a][b] = [0]$).

Attenzione! Per trovare le "prove", è obbligatorio usare l'algoritmo di Euclide.

Esercizio 4.7. Sia A un anello con unità. Si mostri che sono equivalenti

- $A = \{ 0 \}$, e
- $0 = 1$.

Esercizio 4.8. Si trovino gli inversi di tutti gli elementi diversi da zero di $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$.

Qui non è richiesto di usare l'algoritmo di Euclide, ma bisogna giustificare le risposte. Risposte valide sono ad esempio le seguenti.

- Dato che $2 \cdot 10 = 20$, si ha $[2] \cdot [10] = [1]$, dunque l'inverso di $[2]$ è $[10]$.
- Dato che $[10] \cdot [2] = [1]$, l'inverso di $[10]$ è $[2]$.
- Dato che $[-2] \cdot [-10] = [1]$, l'inverso di $[-2] = [17]$ è $[-10] = [9]$.
- Dato che $[1] = [2] \cdot [10] = [2] \cdot [2] \cdot [5]$, l'inverso di $[4]$ è $\dots$, e l'inverso di $[5]$ è $\dots$

Esercizio 4.9. Si dica quali elementi di $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ sono invertibili e quali sono divisori dello zero, indicando per ognuno una "prova", nel senso dell'Esercizio 4.6.

Qui basta dare le risposte.

Esercizio 4.10. Questo esercizio a volte crea qualche confusione, per cui tanto vale premettere due casi particolari. Se $n = 5$, si ha

$$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} = \{\, [0], [1], [2], [3], [4] \,\},$$

ma anche

$$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} = \{\, [-2], [-1], [0], [1], [2] \,\},$$

dato che $[4] = [-1]$ e $[3] = [-2]$. Invece se $n = 6$, si ha

$$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} = \{\, [0], [1], [2], [3], [4], [5] \,\},$$

ma anche

$$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} = \{\, [-2], [-1], [0], [1], [2], [3] = [-3] \,\},$$

dato che ecc. ecc. L'esercizio che segue non fa altro che generalizzare queste osservazioni.

Sia $n \geq 2$, e consideriamo le classi resto modulo n.

Si mostri che esse sono

$$[-(n/2 - 1)], [-(n/2 - 2)], \dots, [-2], [-1], [0], [1], \dots, [n/2] = [-n/2],$$

se n è pari, e

$$[-(n-1)/2], [-((n-1)/2)-1)], [-((n-1)/2)-2)], \dots, [-2], [-1], [0], [1], \dots, [(n-1)/2],$$

se n è dispari.

Importante! Non c'è alcuna contraddizione con il fatto che le classi sono

$$[0], [1], [2], \dots, [n - 1].$$

Sappiamo infatti che una stessa classe si può scrivere in molti modi diversi.

Esercizio 4.11. Enunciate a dimostrate il Lemma dei Cassetti.