TRENTO, A.A. 2021/22
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 1

Avvertenza. Se un esercizio è indicato come *facoltativo*, vuole dire che non sarà fra gli esercizi obbligatori nelle provette.

Esercizio 1.1 (Facoltativo). Si consideri quello che succede moltiplicando il numero 142857 per $1, 2, 3, 4 \dots$. Si descriva quel che succede, si spieghi perché succede, e si produca almeno un altro esempio del genere.

Esercizio 1.2 (Assolutamente facoltativo, non perdeteci tempo se avete altro da fare). Come ricordiamo dalla scuola (ed è scritto nelle note, e vedremo comunque almeno in parte durante il corso), ogni frazione si può scrivere come un numero decimale, che o termina, o è periodico (eventualmente con un antiperiodo).

Usando eventualmente adeguati strumenti di calcolo che potete trovare in rete, verificate il seguente sviluppo decimale

$$\frac{1}{98\,01} = 0.00\,01\,02\,\dots\,96\,97\,99\,00\,01\,\dots$$

e cosí via ripetendo. L'omissione del gruppo 98 nello sviluppo *non* è un errore.

Spiegare. Trovare almeno un altro esempio simile.

Esercizio 1.3. Si *dimostri* che gli unici divisori di 1 in $\mathbf{Z}$ sono 1 e -1. In altre parole, le uniche soluzioni dell'equazione $x \cdot y = 1$, per $x, y \in \mathbf{Z}$ sono $x = y = 1$, e $x = y = -1$.

Esercizio 1.4.

(1) Siano $a, b \in \mathbf{Z}$. Si mostri che sono equivalenti
   - (a) $a \mid b$ e $b \mid a$,
   - (b) $b = \pm a$ (intendo $b = a$ o $b = -a$),
   - (c) $\mathfrak{D}(a) = \mathfrak{D}(b)$, ove

$$\mathfrak{D}(a) = \{\, x \in \mathbf{Z} : x \mid a \,\}.$$

(2) Siano $a, b \in \mathbf{Z}$. Si mostri che sono equivalenti
   - (a) $a \mid b$,
   - (b) $-a \mid b$,
   - (c) $a \mid -b$,
   - (d) $-a \mid -b$.

Esercizio 1.5. Si mostri che

(1) 1 e -1 dividono ogni numero intero;
(2) gli unici numeri interi che dividono ogni numero intero sono 1 e -1;
(3) gli unici divisori di 1 sono $1, -1$;
(4) ogni numero intero divide 0;
(5) 0 è l'unico numero intero che sia divisibile per ogni numero intero;
(6) sia $a \in \mathbf{Z}$, e $B \subseteq \mathbf{Z}$ un sottoinsieme *infinito* degli interi tale che $b \mid a$ per ogni $b \in B$; si mostri che $a = 0$;

(7) l'unico numero intero divisibile per 0 è 0 stesso;
(8) se $b \mid a$, allora esiste *unico* $c \in \mathbf{Z}$ tale che $a = bc$, a meno che non sia $b = 0$.

Esercizio 1.6. Si dimostri il

Teorema (della divisione con resto)*. Siano* $a, b \in \mathbf{Z}$*, con* $b \neq 0$*.*
Si mostri che esistono unici $q, r \in \mathbf{Z}$ *tali che*

$$\begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leq r < \lvert b \rvert, \end{cases}$$

A lezione abbiamo visto come ottenere il caso generale partendo dal caso *elementare* quando $a \geq 0$, $b > 0$. Cercate anche di dare una dimostrazione del caso elementare.

Esercizio 1.7. Siano $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, e sia $a = b + c$. Si dimostri che se d divide almeno due dei numeri a, b, c, allora divide anche il terzo.

(Come caso particolare si ha che se d divide b e c, allora d divide $b + c$.)

Esercizio 1.8 (Lievissima variante del precedente, ma torna utile)*.* Siano $a, b, c, q \in \mathbf{Z}$, e sia $a = bq + c$. Si dimostri che

(1) se d divide a e b, allora divide c, e
(2) se d divide b e c, allora divide a.

In altre parole, $\mathfrak{D}(a) \cap \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(b) \cap \mathfrak{D}(c)$.

Esercizio 1.9. Sia $a \neq 0$ un numero intero. Sia $D = \mathfrak{D}(a)$ l'insieme dei divisori di a.

Consideriamo la funzione f definita su $D \setminus \{ 0 \}$ tale che $f(x) = a/x$. All'apparenza i valori di f sono numeri razionali.

Si mostri che in realtà f ha valori in D, ed è quindi una funzione biiettiva su $D \setminus \{ 0 \}$.

In sostanza, quello che vuole dire questo esercizio è che i divisori di un numero intero a vanno a coppie. Infatti $a = bc$ vuol dire sia $b \mid a$ sia $c \mid a$.

Esercizio 1.10. Si indichino quoziente e resto delle divisioni con resto di a per b, ove a, b assumono i valori seguenti

a	b
-14	4
0	7
-1	7
-2	7
-3	7
-4	7
-5	7
-6	7
-1	1000
-1000	2000
-237	-1508

Esercizio 1.11. Si consideri l'affermazione:

$$\text{Se } a, b \in \mathbf{Z}, \text{ e } b \mid a, \text{ allora } b \leq a,$$

Si mostri che l'affermazione, cosí come è scritta, è falsa. (Basta *un* esempio.) Si veda come aggiustarla.
(SUGGERIMENTO: E' grosso modo una questione di segni. . .)

Esercizio 1.12. Si dia la definizione di massimo comun divisore di due interi, e si mostri che l'algoritmo di Euclide, applicato ad intero $a \geq b > 0$ richiede al più $2\log_2(b)$ divisioni con resto.

Esercizio 1.13. Si mostri che, con la definizione corretta, il massimo comun divisore fra 0 e 0 è 0.

Esercizio 1.14.

(1) Si mostri che sono equivalenti, per $a, b, d \in \mathbf{Z}$:
  (a) d è un massimo comun divisore di a e b;
  (b) $\mathfrak{D}(a) \cap \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(d)$.
(2) Si mostri che se d è un massimo comun divisore di a e b, allora tutti e soli i massimi comun divisori di a e b sono d e $-d$.

Esercizio 1.15. Si mostri che

$$\mathfrak{D}(a) \cap \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(-a) \cap \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(a) \cap \mathfrak{D}(-b) = \mathfrak{D}(-a) \cap \mathfrak{D}(-b).$$

(In altre parole, $\mathfrak{D}(a) \cap \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(|\, a\,|) \cap \mathfrak{D}(|\, b\,|)$.)

Se ne deduca che nel calcolare il MCD di $a, b \in \mathbf{Z}$, ci si può sempre ridurre al caso in cui siano entrambi non negativi.