TRENTO, A.A. 2019/20
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 12

Esercizio 12.1. Mostrate che $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ ha una norma speciale, e mostrate che le unità sono ± 1.

Esercizio 12.2. Sia A un dominio, $a \in A$, con $a \neq 0$, e a non una unità. Mostrate che sono equivalenti:

(1) a *non* è irriducibile (ovvero è riducibile), e
(2) esistono $u, v \in A$ tali che $a = uv$, e né u né v è una unità.

Esercizio 12.3.

(1) Mostrate che in un dominio dotato di una norma speciale
  (a) se un elemento ha norma un numero primo, allora l'elemento è irriducibile;
  (b) in generale non vale il viceversa;
  (c) ogni elemento (diverso da zero, e che non sia una unità), si scrive come prodotto di irriducibili. Un dominio con questa proprietà si dice **atomico**.

Esercizio 12.4.

(1) Mostrate che in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ gli elementi $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ sono irriducibili.
(2) Sfruttando l'eguaglianza
$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$
mostrate che gli elementi $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ non sono primi in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.
(3) Mostrate che in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ non esiste il massimo comun divisore fra
$$a = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \qquad \text{e} \qquad b = 2 \cdot (1 + \sqrt{-5}).$$

Esercizio 12.5.

(1) Date la definizione di dominio a fattorizzazione unica (UFD).
(2) Mostrate che se A è un dominio atomico, sono equivalenti
  (a) in A gli irriducibili sono primi, e
  (b) A è un dominio a fattorizzazione unica (UFD).
(3) Mostrate che $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ non è un UFD.

Esercizio 12.6.

(1) Date la definizione di dominio euclideo.
(2) Mostrate che riguardando $\mathbf{Z}$ come un dominio euclideo, quoziente e resto della divisione con resto non sono più unici
(3) Mostrate che la norma di un dominio euclideo è speciale, dunque un dominio euclideo è atomico.
(4) Mostrate che in un dominio euclideo si può fare l'algoritmo di Euclide esteso, dunque esiste il massimo comun divisore, e valgono i Lemmi Aritmetici.

(5) Mostrate che in un dominio euclideo gli irriducibili sono primi, e dunque un dominnio euclideo è un UFD.