TRENTO, A.A. 2019/20
CORSO DI ALGEBRA A
FOGLIO DI ESERCIZI # 6

Esercizio 6.1.

(1) Definite i morfismi e gli isomorfismi di anelli.
(2) Date un esempio di due anelli con unità A e B, e di un morfismo $f : A \to B$ tale che $f(1) \neq 1$.
(3) Mostrate che se A, B sono due anelli con unità, e $f : A \to B$ è un morfismo *suriettivo*, allora $f(1) = 1$.
(4) Mostrate che se A, B sono due anelli con unità, $f : A \to B$ è un morfismo *suriettivo*, e $a \in A$ è invertibile, allora anche $f(a)$ lo è, e si ha $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Esercizio 6.2.

(1) Definite il prodotto diretto di due gruppi, e fate vedere che è un gruppo. Dite in particolare chi sono l'elemento neutro e gli inversi.
(2) Definite il prodotto diretto di due anelli, e fate vedere che è un anelli. Dite in particolare chi sono l'elemento neutro e gli opposti.

Esercizio 6.3. Siano $m, n \geq 2$ interi tali che $\gcd(m, n) = 1$.

(1) Mostrate che la funzione (che già sappiamo essere ben definita, e una biiezione)
$$\begin{aligned} f : \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} &\to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ [x]_{mn} &\mapsto ([x]_m, [x]_n) \end{aligned}$$
è un isomorfismo di anelli.
(2) Mostrate che f stabilisce una biiezione fra $U(\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})$ e $U(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \times U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \subseteq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
(3) Deducetene di nuovo la formula $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ per la funzione di Eulero.

Esercizio 6.4.

(1) Sia G un gruppo, $H \subseteq G$. Dite quando H è un sottogruppo di G.
(2) Mostrate che un sottogruppo di un gruppo è un gruppo rispetto alle (restrizioni delle) operazioni del gruppo.
(3) Mostrate che l'immagine di un gruppo sotto un morfismo di gruppi è un sottogruppo del codominio.
(4) Sia A un anello, $S \subseteq A$. Dite quando S è un sottoanello di A.
(5) Mostrate che un sottoanello di un anello è un anello rispetto alle (restrizioni delle) operazioni dell'anello.
(6) Mostrate che l'immagine di un anello sotto un morfismo di anelli è un sottoanello del codominio.

Esercizio 6.5. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per gruppi.

Esercizio 6.6. Enunciate e dimostrate il primo teorema di isomorfismo per anelli.

Esercizio 6.7 (Facoltativo)*.*

(1) Mostrate che
$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}.$$
(2) Mostrate che
$$\varphi(m^k) = \varphi(m)m^{k-1}.$$
(3) Mostrate che
$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(\gcd(m,n)) \cdot \varphi(\operatorname{lcm}(m,n)).$$

Esercizio 6.8 (Facoltativo)*.* Mostrate che l'eguaglianza
$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$
non vale *mai* se $\gcd(m,n) > 1$. (SUGGERIMENTO: Può essere utile, ma non è indispensabile, l'esercizio precedente.)